Оценка величин Δt_1 и Δt_2 показала, что, как правило, значения Δt_1 меньше Δt_2 на три порядка, поэтому значение Δt выбирается равным Δt_1. В связи с этим относительную погрешность прогноза длины жидкой фазы исследовали при варьировании только коэффициента k_1; варьирование этого коэффициента в интервале 3 – 10 не показало влияния на погрешность.

Выводы. При тестировании численного решения задачи затвердевания, полученного методом конечных разностей с использованием явной схемы аппроксимации производных, получены следующие результаты: одновременное измельчение сетки и соответствующее уменьшение шага по времени согласно условию устойчивости существенно влияет на уменьшение погрешности; в результате тестирования установлено, что для уменьшения относительной погрешности до 1% необходимое количество узлов сетки по оси *Oz* не менее 200; величину фиктивного интервала ΔT при численном решении задачи Стефана следует подбирать из условия минимума относительной погрешности.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Крупный слиток / А.Н. Смирнов, С.Л. Макуров, В.М. Сафонов, А.Ю. Цупрун. – Д.: Металлургия, 2009. – 278 с.
2. Иванова А.А. – В кн.: Труды ИПММ НАН Украины. Т. 16. – Донецк: ИПММ, 2008. С. 93 – 102.
3. Кабаков З.К., Мазина И.Ю. – В кн.: Автоматизация и энергосбережение машиностроительного и металлургического производств, технология и надежность машин, приборов и оборудования. Материалы шестой международной науч.-техн. конференции. Т. 1. – Вологда: изд. ВоГТУ, 2010. С. 132 – 135.
4. Тепловые процессы при непрерывном литье стали / Ю.А. Самойлович, С.А. Крулевецкий, В.А. Горяинов, З.К. Кабаков. – М.: Металлургия, 1982. – 152 с.

© 2013 г. *З.К. Кабаков, И.Ю. Мазина, Т.А. Окунева*
Поступила 13 марта 2012 г.

УДК 621.78:532.54

Э.Е. Бейгельзимер[1], Я.Е. Бейгельзимер[2]

[1] Научно-производственное общество «Доникс»
[2] Донецкий национальный технический университет

МЕТОДИКА РАСЧЕТА ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ РАЗМЕРОВ ПЯТНА ОРОШЕНИЯ СПРЕЙЕРНОЙ СТРУИ НА ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ЛИСТОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Аннотация. Завершен цикл исследований по разработке аналитической модели геометрии пятна орошения спрейерной жидкой струи на плоской поверхности. Показан способ приближенного учета силы тяжести и сопротивления среды при расчете размеров пятна орошения наклонных струй, натекающих как на верхнюю, так и на нижнюю поверхности горизонтального листа. Результаты работы могут быть использованы при проектировании установок и технологии охлаждения и закалки горячих металлических листов спрейерными струями жидкости.

Ключевые слова: пятно орошения, струя, технология, аналитическая модель.

CALCULATION METHOD OF THE ACTUAL SPOT SIZE OF SPRAY JET IRRIGATION ON THE HORIZONTAL SHEET SURFACE

Abstract. Series of studies of the analytical model development of the spot geometry of spray jet irrigation on the flat surface is completed. The method of approximate calculation of gravity and environmental resistance for estimation of spot sizes of inclined jet irrigation, accumulating both on the top and the bottom surfaces of the horizontal sheet, is described. The results can be used for the design of installations and cooling technologies and quenching of hot metal sheets by spray liquid jets.

Keywords: spot irrigation, jet, technologie, analytical model.

Во многих процессах металлургического производства (в зоне вторичного охлаждения МНЛЗ, при ускоренном охлаждении проката, при гидросбиве окалины, при закалке металла и др.) используется подача на листовую поверхность жидкости из форсунок в виде спрейерных струй, состоящих из множества отдельных капель. Эффективность такой обработки во многом зависит от размеров *пятна орошения* – области, в пределах которой происходит первичный контакт жидких капель с поверхностью. В работе [1] получены формулы для расчета так называемых *теоретических* размеров пятна орошения при допущении, что границы струи являются прямыми линиями. Фактически форма струи является криволинейной, поскольку траектории полета капель искривляются под действием силы тяжести и сопротивления среды [2]. Размеры пятна орошения, учитывающие реальную форму струи, называют *действительными*.

На практике при определенных параметрах и режимах работы форсунок действительные размеры пятна орошения могут существенно отличаться от теоретических. Однако сегодня и производители форсунок, и технологи на производстве вынуждены игнорировать это возможное несоответствие ввиду отсутствия инженерного решения задачи расчета действительных размеров пятна орошения.

Ниже представлено решение этой задачи, выполненное применительно к случаю натекания струй на горизонтальную листовую поверхность. При этом, как и в работе [1], рассматриваются *незакрученные* струи, т.е. струи, в которых все векторы скорости в выпускном сечении форсунки проходят через одну и ту же прямую линию – *продольную ось струи*.

Расчет размеров пятна орошения струи, перпендикулярной к поверхности

В простейшем случае, когда продольная ось струи перпендикулярна листовой поверхности (рис. 1), размер пятна орошения может быть рассчитан так:

$$D = d + 2X, \tag{1}$$

где d – соответствующий размер выпускного отверстия форсунки; X – дальность полета граничных капель струи, которая определяется непосредственно с использованием результатов работы [2] по формуле

$$X = \frac{2H \operatorname{ctg}\beta_0}{1+\sqrt{1\pm\Omega}}; \tag{2}$$

знак «+» в подкоренном выражении относится к капле верхней струи (направленной на верхнюю поверхность листа), знак «–» – к капле нижней струи (направленной на нижнюю поверхность листа); H – расстояние от выпускного отверстия форсунки до поверхности листа; β_0 – угол вылета граничных капель из форсунки относительно горизонтали, который связан с углом раскрытия струи α следующим соотношением (оба угла – в радианах):

$$\beta_0 = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}. \tag{3}$$

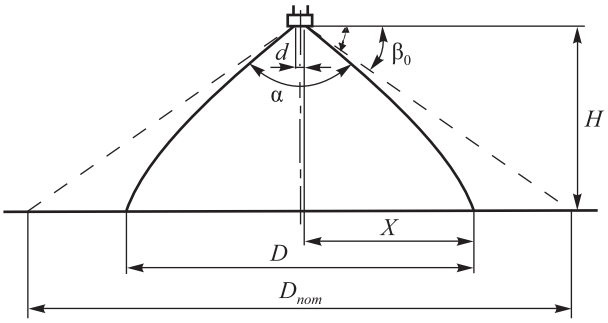

Рис. 1. Схема, поясняющая расчет размеров пятна орошения спрейерной струи, перпендикулярной к поверхности

Безразмерный комплекс Ω рассчитывается по формуле

$$\Omega = g\frac{\exp\left(2k_x SH\right)-1}{k_x S v_0^2 \sin^2\beta_0}, \tag{4}$$

в которой g – ускорение свободного падения, v_0 – скорость капли при вылете из форсунки, k_x – параметр модели по траектории, S – размерный комплекс (м$^{-1}$), определяемый из соотношения

$$S = \frac{3}{8}\frac{c}{R}\frac{\rho_a}{\rho}, \tag{5}$$

где $c \approx 0{,}45$ – коэффициент лобового сопротивления капли; R – радиус капли (принят постоянным по длине траектории); ρ_a – плотность парогазовой среды; ρ – плотность жидкости.

Для *верхней* струи параметр модели определяется как

$$\left.\begin{aligned} k_x &= \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sin\beta_0}\right) \text{ при } H\sqrt{gS} \le 0{,}17 v_0 \sin\beta_0; \\ k_x &= \frac{1}{4}\left(3+\frac{1}{\sin\beta_0}\right) \text{ при } H\sqrt{gS} > 0{,}17 v_0 \sin\beta_0; \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

для *нижней* струи

$$k_x = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sin\beta_0}\right). \tag{7}$$

В большинстве случаев размером выпускного отверстия форсунки можно пренебречь по сравнению с размером пятна орошения. Поэтому формулу (1) можно записать в приближенном виде:

$$D = \frac{4H}{1+\sqrt{1\pm\Omega}} \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}. \tag{8}$$

Для сравнения на рис. 1 показан так называемый номинальный размер пятна орошения $D_{пот}$, который указывают производители форсунок. Он определяется исходя из допущения о постоянстве угла раскрытия струи по ее длине:

$$D_{пот} = 2H \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}. \tag{9}$$

Сравнивая формулы (8) и (9), можно записать

$$D = k_D D_{пот}, \tag{10}$$

где k_D – коэффициент влияния силы тяжести и сопротивления среды, равный

$$k_D = \frac{2}{1+\sqrt{1\pm\Omega}}. \tag{11}$$

На рис. 2 показана зависимость коэффициента k_D от расстояния (по вертикали) H от выпускного отверстия форсунки до поверхности листа для водяных струй с углом раскрытия $\alpha = 120°$, движущихся в парогазовой среде. Кривые *1 – 3* отвечают струям с различными средними значениями скорости вылета (v_0) и радиуса (R) капель: $v_0 = 40$ м/с и $R = 0{,}3$ мм (кривые *1* и *1′*), $v_0 = 20$ м/с и $R = 0{,}7$ мм (кривые *2* и *2′*), $v_0 = 10$ м/с и $R = 0{,}9$ мм (кривые *3* и *3′*). Значение коэффициента влияния силы тяжести и сопротивления среды варьируется в интервалах $k_D = 0{,}7 \div 1{,}0$ и $k_D = 1{,}0 \div 1{,}3$ соответственно для верхних и нижних струй.

Погрешность, которую вносит в расчет размера пятна орошения допущение о постоянстве угла раскрытия струи по ее длине (т.е. пренебрежение влиянием силы тяжести и сопротивления среды), можно оценить по формуле

$$\frac{D_{пот} - D}{D} = \frac{1}{k_D} - 1. \qquad (12)$$

При значениях $k_D = 0{,}95 \div 1{,}05$ указанная погрешность не превышает 5 %; в этом случае влиянием силы тяжести и сопротивления среды на размер пятна орошения можно пренебречь. В других случаях пренебрежение указанными факторами может приводить к существенной погрешности: до плюс 40 % для верхних струй (при $k_D = 0{,}7$) и до минус 20 % для нижних (при $k_D = 1{,}3$).

Расчет размеров пятна орошения при произвольном расположении форсунки

Перейдем к рассмотрению общего случая, когда форсунка наклонена к поверхности листа и повернута на определенный угол относительно своей продольной оси. В части терминологии и обозначений будем следовать работе [2]. На рис. 3 изображено выпускное сечение форсунки с центром в точке O. Ее продольная ось OO' наклонена к вертикали под углом γ. В плоскости выпускного сечения проведем прямую OC, параллельную плоскости листа. Эту прямую назовем *полярной осью*. Рассмотрим траекторию капли, вылетающей из произвольной точки P выпускного сечения. Положение точки P определяется углом поворота θ *радиуса* OP относительно полярной оси выпускного сечения форсунки (радиусом будем называть любой отрезок, соединяющий центральную точку сечения с его границей, независимо от того, круглое это сечение или нет). Если не учитывать силу тяжести и сопротивление среды, указанную траекторию можно представить прямой линией PP', пересекающей продольную ось струи в фокусе F. Из-за воздействия силы тяжести и сопротивления среды траектория искривляется и вместо прямой линии PP' принимает форму кривой PP^* (где P^* – точка падения капли на поверхность листа). Введем декартову систему координат: центр координат поместим в фокусе F, ось z направим по продольной оси струи, ось y – параллельно полярной оси выпускного сечения форсунки, ось x – перпендикулярно осям y и z.

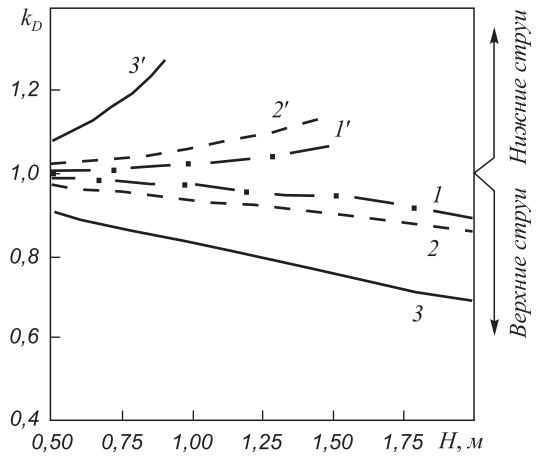

Рис. 2. Зависимость коэффициента влияния силы тяжести и сопротивления среды от расстояния от сопла до поверхности листа для верхней (область ниже значения $k_D = 1$) и нижней (область выше значения $k_D = 1$) струй

Пусть Q – основание перпендикуляра, опущенного из точки P на плоскость листа. Можно считать, что длина этого перпендикуляра приближенно равна длине перпендикуляра $|OE| = H$, опущенного на плоскость листа из центра выпускного сечения форсунки, т.е. будем полагать, что $|PQ| \approx H$. Удаление точки P^* по горизонтали от точки P на рис. 3 выражается длиной отрезка QP^*. Обозначим это удаление через $X = |QP^*|$. Соотношение между параметрами H и X выражается формулами (2) – (7).

Значение (в радианах) фактического угла β_0 наклона скорости капли к горизонтали при вылете из форсунки может быть выражено так (рис. 3):

$$\beta_0 = \frac{\pi}{2} - \psi, \qquad (13)$$

где ψ – угол наклона вектора скорости капли к вертикали при вылете из форсунки, рад.

Косинус угла ψ равен скалярному произведению векторов: единичного вектора нормали к поверхности листа $\vec{n}$ и единичного вектора образующей конуса орошения $\vec{p}$ (направленного по образующей PP'):

$$\cos\psi = \vec{n}\vec{p}. \qquad (14)$$

С другой стороны, скалярное произведение векторов равно сумме попарных произведений их декартовых координат:

$$\vec{n}\vec{p} = n_x p_x + n_y p_y + n_z p_z. \qquad (15)$$

В системе координат, введенной на рис. 3, координаты этих векторов составят

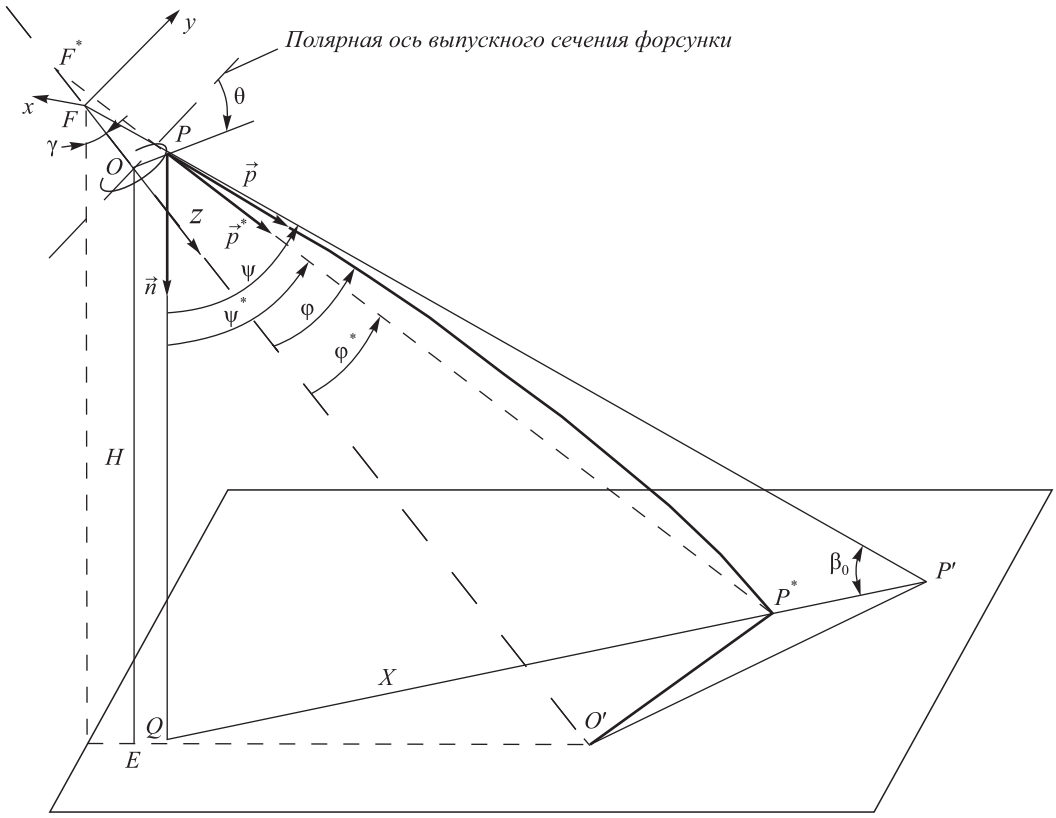

Рис. 3. Расчетная схема к определению размеров пятна орошения спрейерной струи с учетом силы тяжести и сопротивления среды

$$n_x = \sin\gamma,\ n_y = 0,\ n_z = \cos\gamma; \qquad (16)$$

$$p_x = \frac{x_P}{|FP|},\ p_y = \frac{y_P}{|FP|},\ p_z = \frac{z_P}{|FP|}, \qquad (17)$$

где x_P, y_P и z_P – координаты точки P; $|FP|$ – длина отрезка FP, равная

$$|FP| = \frac{r}{\sin\varphi}, \qquad (18)$$

r – длина радиуса OP, φ – *угол раствора струи* в точке P (т.е. угол между продольной осью струи OO' и образующей PP').

Координаты точки P следующие [1]:

$$x_p = -r\sin\theta,\ y_p = r\cos\theta,\ z_p = r\,\mathrm{ctg}\,\varphi. \qquad (19)$$

Учитывая уравнения (18) и (19), из выражений (17) находим координаты единичного вектора $\vec{p}$:

$$p_x = -\sin\theta\sin\varphi,\ p_y = \cos\theta\sin\varphi,\ p_z = \cos\varphi. \qquad (20)$$

Подставляя координаты векторов (16) и (20) в уравнение (15), совместно с (14) получаем

$$\cos\psi = \sin\beta_0 = \cos\varphi\cos\gamma - \sin\theta\sin\varphi\sin\gamma. \qquad (21)$$

Формула (21) позволяет рассчитать синус искомого угла наклона образующей к горизонтали (β_{00}) в зависимости от угла наклона струи (γ), угла ее раствора по расчетному радиусу (φ) и полярного угла поворота этого радиуса (θ). С использованием полученного значения $\sin\beta_0$ по формуле (2) может быть рассчитано расстояние X, на которое точка P^* падения капли удалена в плоскости листа от основания Q перпендикуляра, опущенного из точки P.

Соединим точку P с точкой P^* прямым отрезком (см. рис. 3). Угол наклона отрезка PP^* к вертикали обозначим символом ψ^*. Из прямоугольного треугольника PQP^* следует

$$\mathrm{tg}\,\psi^* = \frac{X}{H}. \qquad (22)$$

С учетом выражения (2) для параметра X из последней формулы находим

$$\mathrm{tg}\,\psi^* = \frac{2\sqrt{1-\sin^2\beta_0}}{\left(1+\sqrt{1\pm\Omega}\right)\sin\beta_0}. \qquad (23)$$

Прямая PP^* является скрещивающейся по отношению к продольной оси струи OO', т.е. продолжение прямой PP^* в обратную сторону от точки P фактически не пересекает ось OO'. Однако в первом приближении можно не учитывать расхождение указанных прямых, считая условно, что они пересекаются в новом фокусе F^*. По направлению PP^* проведем единичный вектор $\vec{p}^*$ (согласно принятому допущению, направление этого

вектора проходит через фокус F^*). Определим координаты вектора $\vec{p}^*$ в системе координат, аналогичной ранее принятой, только с центром в точке F^*. Для этого повторим выкладки, сделанные ранее при определении координат вектора $\vec{p}$. В результате находим

$$p_x^* = -\sin\theta \sin\varphi^*,\ p_y^* = \cos\theta \sin\varphi^*,\ p_z^* = \cos\varphi^*, \quad (24)$$

где φ^* – угол между отрезком PP^* и продольной осью струи OO', который можно назвать *приведенным углом раствора струи* по данному расчетному радиусу выпускного отверстия форсунки.

По аналогии с формулой (21) запишем соотношение, основанное на скалярном произведении векторов $\vec{n}$ и $\vec{p}^*$:

$$\cos\psi^* = \cos\varphi^* \cos\gamma - \sin\theta \sin\varphi^* \sin\gamma. \quad (25)$$

Заменяя в этой формуле $\cos\varphi^* = \sqrt{1-\sin^2\varphi^*}$, после элементарных преобразований получаем для определения угла φ^* квадратное уравнение, имеющее в общем случае два корня:

$$\varphi_1^* = \arcsin\Big[\Big(-\cos\psi^* \sin\theta \sin\gamma + \\ + \cos\gamma\sqrt{\sin^2\psi^* - \sin^2\gamma\cos^2\theta}\Big)/\big(1-\sin^2\gamma\cos^2\theta\big)\Big]; \quad (26)$$

$$\varphi_2^* = \arcsin\Big[\Big(-\cos\psi^* \sin\theta \sin\gamma - \\ - \cos\gamma\sqrt{\sin^2\psi^* - \sin^2\gamma\cos^2\theta}\Big)/\big(1-\sin^2\gamma\cos^2\theta\big)\Big]. \quad (27)$$

Напомним, что уравнение (25) и соответственно решения (26) и (27) являются приближенными, поскольку получены в рамках допущения о том, что прямая PP^* и продольная ось OO' пересекаются. Сопоставление результатов расчетов по формулам (26), (27) с результатами численного моделирования показывает, что с достаточной в практических целях точностью можно рекомендовать следующие инженерные формулы для определения угла φ^* на базе полученных корней (26), (27):

$$\text{если } \sin^2\psi^* - \sin^2\gamma\cos^2\theta \ge 0{,}1 \text{ и } \left|\varphi - \varphi_1^*\right| < \left|\varphi - \varphi_2^*\right|, \\ \text{то } \varphi^* = \varphi_1^*;$$

$$\text{если } \sin^2\psi^* - \sin^2\gamma\cos^2\theta \ge 0{,}1 \text{ и } \left|\varphi - \varphi_1^*\right| \ge \left|\varphi - \varphi_2^*\right|, \\ \text{то } \varphi^* = \varphi_2^*; \quad (28)$$

$$\text{если } \sin^2\psi^* - \sin^2\gamma\cos^2\theta < 0{,}1, \text{ то } \varphi^* = \varphi.$$

Итак, влияние силы тяжести и сопротивления среды на размер пятна орошения в первом приближении может быть учтено заменой исходного угла раствора струи φ на приведенный угол раствора φ^*. Подобная замена может быть выполнена для любого полярного угла θ поворота радиуса выпускного сечения форсунки. Это дает возможность свести расчет размеров пятна орошения к формулам, полученным в работе [1] без учета силы тяжести и сопротивления среды. Для этого достаточно в них заменить угол φ на угол φ^*. Обозначая и другие параметры «звездочкой» (что будет означать, что они определяются с учетом силы тяжести и сопротивления среды), указанные формулы можно записать в виде

$$R_\theta^* = k_{R\theta}^* R_0^*, \quad (29)$$

где R_θ^* – радиус пятна орошения при нулевом полярном угле поворота соответствующего радиуса выпускного сечения форсунки, определяемый как

$$R_0^* = r + \frac{H}{\cos\gamma}\operatorname{tg}\varphi^*; \quad (30)$$

$k_{R\theta}^*$ – коэффициент влияния полярного угла на радиус пятна орошения,

$$k_{R\theta}^* = \frac{\sqrt{1+\sin^2\theta\operatorname{tg}^2\gamma}}{1-\sin\theta\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\varphi^*}. \quad (31)$$

Напомним, что формула (24) справедлива для таких сочетаний углов θ, γ и φ^*, при которых траектория капли пересекает плоскость листа [1]:

$$1 - \sin\theta\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\varphi^* > 0. \quad (32)$$

Следует обратить внимание на то, что даже в условиях равенства углов раствора струи φ в симметричных точках выпускного сечения форсунки, приведенные углы раствора φ^* в этих точках в общем случае не равны между собой. Поэтому в случае расчета пятна орошения с учетом силы тяжести и сопротивления среды перейти от радиуса к диаметру пятна орошения, как это сделано в работе [1], не представляется возможным. В этом случае значение диаметра пятна орошения определяется суммированием длин сопряженных радиусов, которые рассчитываются отдельно.

В качестве примера на рис. 4 показаны пятна орошения для наклонной струи воды, рассчитанные с учетом (по формулам настоящей статьи) и без учета (по формулам работы [1]) силы тяжести и аэродинамического сопротивления. Принято, что струя истекает из конусной форсунки (имеющей круглую форму выпускного сечения), средний радиус капель R = 0,7 мм, скорость капель при вылете из форсунки v_0 = 20 м/с, вертикальное расстояние от выпускного сечения форсунки до поверхности листа H = 0,5 м, продольная ось струи наклонена к вертикали под углом γ = 20°, исходный угол раствора струи φ = 55°. В приведенном примере влияние силы тяжести и сопротивления среды выражается в том, что для верхней струи (т.е.

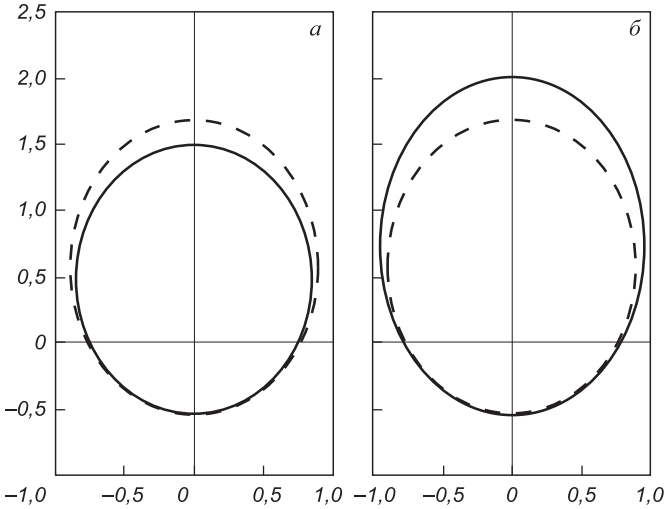

Рис. 4. Расчетное пятно орошения верхней (*а*) и нижней (*б*) наклонной спрейерной струи воды из конусной форсунки со следующими параметрами: R = 0,7 мм, v_0 = 20 м/с, H = 0,5 м, γ = 20°, φ = 5°; ▬ – с учетом силы тяжести и сопротивления среды по формулам настоящей работы; – – – – без учета силы тяжести и сопротивления среды по формулам работы [1]; в системе координат *0* – точка пересечения продольной оси струи с плоскостью листа, значения координат – в метрах

натекающей на верхнюю поверхность листа) площадь пятна орошения уменьшается на 11 %, а для нижней струи (т.е. натекающей на нижнюю поверхность листа) – увеличивается на 18 %.

Выводы. Обоснована методика приближенного учета силы тяжести и сопротивления среды при расчете геометрии пятна орошения наклонной спрейерной струи на поверхности горизонтального листа. Решение справедливо для струй, натекающих как на верхнюю, так и на нижнюю поверхности листа. Итоговые формулы выражены в виде простых зависимостей (29) – (31). Их отличие от аналогичных формул, полученных без учета силы тяжести и сопротивления среды, состоит в использовании приведенного угла раствора струи φ^* взамен номинального. Для расчета угла φ^* использовано полученное ранее приближенное уравнение траектории сферической капли жидкости в парогазовой среде. Учет реального искривления формы спрейерной струи по приведенным выше формулам позволяет на 10 – 20 % уточнить оценку площади пятна орошения при проектировании и управлении процессом охлаждения горячих металлических листов.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бейгельзимер Э.Е., Бейгельзимер Я.Е. // Изв. вуз. Черная металлургия. 2012. № 8. С. 32 – 36.
2. Бейгельзимер Э.Е., Бейгельзимер Я.Е. // Изв. вуз. Черная металлургия. 2012. № 6. С. 43 – 47.

© 2013 г. *Э.Я. Бейгельзимер, Я.Е. Бейгельзимер*
Поступила 12 января 2012 г.