

Э.Е. Бейгельзимер, Я.Е. Бейгельзимер

Донецкий национальный технический университет (Украина)

ИНЖЕНЕРНЫЙ РАСЧЕТ ФОРМЫ СПРЕЙЕРНОЙ СТРУИ ДЛЯ ОХЛАЖДЕНИЯ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ ЛИСТОВ

Спрейерные струи, состоящие из отдельных капель жидкости, широко используются в металлургическом производстве для охлаждения продукции и инструмента. Такие струи формируются при истечении жидкости под давлением из сопла форсунки и имеют форму кругового или сплюсненного конуса, так называемого конуса орошения. Образующие конуса орошения в общем случае искривлены из-за воздействия на движущиеся капли сил тяжести и сопротивления среды. На рис. 1 показана схема натекания струй из веерных форсунок на поверхность листа. Область, которую покрывает струя на охлаждаемой поверхности, называют пятном орошения. Задача расчета фактических размеров этого пятна с учетом реальной кривизны образующих конуса орошения до настоящего времени не решена в виде аналитических функций. Объясняется это тем, что дифференциальное уравнение движения капли в поле тяжести с учетом сопротивления среды в общем случае не интегрируется в квадратурах, соответственно в различных технических приложениях оно решается численно (см. работы [1 – 4], а также работу Л.А. Полеводой¹). В то же время, это не исключает возможности получения приближенного аналитического решения в частном случае.

Поиск именно такого приближенного решения был выполнен для условий работы форсунок водяного охлаждения и закалки металлических листов. Эти условия таковы: радиус каплей $0,3 \cdot 10^{-3} \text{ м} < R < 2,0 \cdot 10^{-3} \text{ м}$, расстояние от выпускного сечения форсунки до охлаждаемой поверхности $0,1 \text{ м} < H < 2,0 \text{ м}$, угол вылета каплей к горизонтали $30^\circ \leq \beta_0 < 90^\circ$, скорость вылета каплей $10 \text{ м/с} < v_0 < 40 \text{ м/с}$, число Рейнольдса $Re = v_0 2R / \nu_a > 800$ (где ν_a – кинематическая вязкость среды, м²/с).

Уравнение движения капли

Запишем уравнение движения центра масс капли в парогазовой среде²:

[1, 2]

$$m \frac{d\vec{v}}{d\tau} = m\vec{g} + \vec{F}; \quad (1)$$

здесь m – масса капли; \vec{v} – вектор скорости капли; τ – время; \vec{g} – вектор ускорения свободного падения; \vec{F} – вектор силы аэродинамического сопротивления.

В этом уравнении не учтены реактивные силы (допущение 1), которые могут быть обусловлены коагуляцией данной капли с другими каплями, конденсацией на ней пара, а также ее частичным испарением. Правомочность указанного допущения для рассматриваемых условий подтверждается расчетами конденсации и испарения [5, с. 120 – 135], а также опытными данными о размерах капель на разных расстояниях от сопла [6, с. 52]. Кроме этого, в уравнении (1) предполагается, что среда неподвижна (допущение 2).

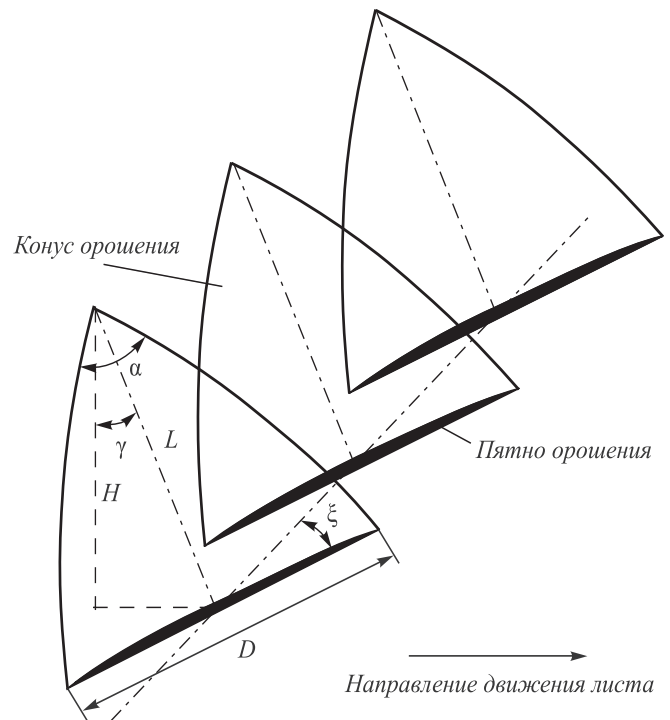


Рис. 1. Схема натекания плоских спрейерных струй на поверхность листа:

D – размер пятна орошения; H – расстояние от выпускного сечения форсунки до плоскости листа; L – длина струи по продольной оси; α – угол раскрытия струи; γ – угол наклона струи; ξ – угол разворота пятна орошения

¹ Полевода Л.А. Теплообмен в устройствах систем газоочистки конвертерных газов и усовершенствование системы водяного охлаждения. Автореф. дис. канд. техн. наук. – Череповец, 2010. 24 с.

² Здесь и далее в рамке слева от формулы указаны номера допущений, при которых она справедлива. Допущения вводятся ниже по тексту. Все формулы записаны в системе СИ.

Решение для капли верхней струи

Введем декартову систему координат (рис. 2). Начало координат (точку O) поместим в точку вылета капли из форсунки. Ось x направим горизонтально в плоскости вектора скорости капли. Ось y для капли, движущейся сверху вниз, направим вертикально вниз. Сила сопротивления \vec{F} направлена по прямой вектора скорости, поэтому все три вектора в уравнении (1) лежат в плоскости xOy , что позволяет записать это уравнение в проекциях на две оси координат:

$$[1, 2] \quad m \frac{dv_x}{d\tau} = -F \cos \beta; \quad (2)$$

$$[1, 2] \quad m \frac{dv_y}{d\tau} = -F \sin \beta + mg, \quad (3)$$

где F и g – величины соответствующих векторов; β – угол между вектором скорости \vec{v} и осью x ; v_x и v_y – проекции скорости \vec{v} капли на оси x и y соответственно:

$$v_x = v \cos \beta; \quad v_y = v \sin \beta. \quad (4)$$

Считая каплю шаром (допущение 3), ее массу выразим так:

$$[3] \quad m = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho, \quad (5)$$

где ρ – плотность жидкости.

Сила аэродинамического сопротивления для шара определяется как [7, с. 348]

$$F = \frac{1}{2} c \pi R^2 \rho_a v_r^2, \quad (6)$$

где ρ_a – плотность среды; v_r – скорость капли относительно среды; c – коэффициент лобового сопротивления, в общем случае зависящий от числа Рейнольдса.

Для шара при $Re > 800$ коэффициент лобового сопротивления остается практически постоянным и равным

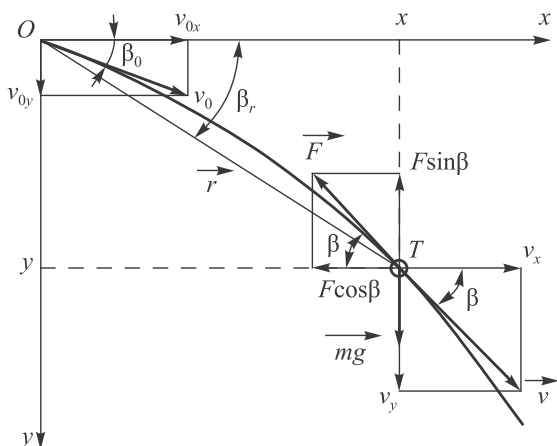


Рис. 2. Расчетная схема к уравнению движения капли

примерно $c = 0,45$ [8, с. 487]. Считая по допущению 2, что $v_r = v$, и используя выражение (5), преобразуем формулу (6) к виду

$$[2, 3] \quad F = \frac{1}{2} c \pi R^2 \rho_a v^2 = \frac{3}{8} \frac{m c \rho_a}{R} v^2. \quad (8)$$

Подставим эту формулу в уравнения (2), (3), сократим в обеих частях уравнений массу капли и используем соотношения (4). В результате получим

$$[1-3] \quad \frac{dv_x}{d\tau} = -S v_x v; \quad (9)$$

$$[1-3] \quad \frac{dv_y}{d\tau} = -S v_y v + g, \quad (10)$$

где символом S обозначен комплекс параметров, имеющий размерность m^{-1} :

$$S \equiv \frac{3}{8} \frac{c \rho_a}{R \rho}. \quad (11)$$

Умножим уравнение (9) на v_y , а уравнение (10) – на v_x . После вычитания первого уравнения из второго и деления обеих частей на v_x^2 получим

$$[1-3] \quad \frac{di}{d\tau} = \frac{g}{v_x}, \quad (12)$$

где символом i обозначен тангенс угла наклона вектора скорости к горизонтали:

$$\operatorname{tg} \beta \equiv i = \frac{v_y}{v_x}. \quad (13)$$

Присоединяя уравнение (9), получим систему двух уравнений:

$$[1-3] \quad \begin{cases} \frac{dv_x}{d\tau} = -S v_x^2 i \sqrt{1 + \frac{1}{i^2}}; \\ \frac{di}{d\tau} = \frac{g}{v_x}. \end{cases} \quad (14)$$

В первом уравнении системы учтено, что

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = v_x \sqrt{1 + i^2} = v_x i \sqrt{1 + \frac{1}{i^2}}. \quad (15)$$

Вместо времени τ введем независимую переменную y :

$$\frac{dv_x}{d\tau} = \frac{dv_x}{dy} \cdot \frac{dy}{d\tau} = \frac{dv_x}{dy} v_y = \frac{dv_x}{dy} i v_x; \quad (16)$$

$$\frac{di}{d\tau} = \frac{di}{dy} \cdot \frac{dy}{d\tau} = \frac{di}{dy} v_y = \frac{di}{dy} i v_x. \quad (17)$$

С учетом этих соотношений система (14) преобразуется к виду

$$\boxed{I-3} \quad \begin{cases} \frac{dv_x}{dy} = -Sv_x \sqrt{1 + \frac{1}{i^2}}; \\ iv_x^2 \frac{di}{dy} = g. \end{cases} \quad (18)$$

Итак, имеем систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений с двумя неизвестными функциями v_x и i . Начальными условиями являются:

$$\text{при } y = 0 \quad \begin{cases} v_x = v_0 \cos \beta_0; \\ i = \operatorname{tg} \beta_0 \equiv i_0, \end{cases} \quad (19)$$

где v_0 и β_0 – скорость капли и угол ее наклона к оси x при вылете из форсунки (рис. 2).

В общем случае система (19) не интегрируется в квадратурах. Чтобы найти приближенное решение, проанализируем квадратный корень в первом уравнении. Поскольку для капли, движущейся вниз, угол β может только возрастать, то

$$1 \leq \sqrt{1 + \frac{1}{i^2}} < \sqrt{1 + \frac{1}{i_0^2}}. \quad (20)$$

Применительно к нашему случаю учтем, что $\beta_0 \geq 30^\circ$. Для таких углов в первом приближении можно принять, что параметр $\sqrt{1 + 1/i^2}$ является величиной постоянной (допущение 4):

$$\boxed{4} \quad \sqrt{1 + \frac{1}{i^2}} \equiv k_v \approx \operatorname{const}. \quad (21)$$

Согласно неравенству (20) константу k_v можно оценить интервалом

$$1,0 \leq k_v < \sqrt{1 + \frac{1}{i_0^2}} = \frac{1}{\sin \beta_0}. \quad (22)$$

С учетом допущения 4 первое уравнение системы (18) принимает вид

$$\boxed{I-4} \quad \frac{dv_x}{dy} = -k_v S v_x. \quad (23)$$

Принимаем постоянными коэффициент аэродинамического сопротивления (допущение 5) и радиус капли по всей траектории ее движения (допущение 6):

$$\boxed{5} \quad c = \operatorname{const}; \quad (24)$$

$$\boxed{6} \quad R = \operatorname{const}. \quad (25)$$

В рамках этих двух допущений параметр S является величиной постоянной ($S = \operatorname{const}$), а дифференциальное уравнение (23) – линейным и однородным. Разделяя в нем переменные, после интегрирования находим общее решение:

$$\boxed{I-6} \quad \ln v_x = -k_v S y + \ln C_0. \quad (26)$$

Константа интегрирования определяется первым из начальных условий (19): $C_0 = v_0 \cos \beta_0$. Окончательно находим горизонтальную проекцию скорости капли:

$$\boxed{I-6} \quad v_x = v_0 \cos \beta_0 \exp(-k_v S y). \quad (27)$$

Обратимся ко второму уравнению системы (18), которое с учетом выражения (27) принимает вид

$$\boxed{I-6} \quad iv_0^2 \cos^2 \beta_0 \exp(-2k_v S y) \frac{di}{dy} = g. \quad (28)$$

Интегрированием этого уравнения после разделения переменных получим

$$\boxed{I-6} \quad i^2 = \frac{g}{k_v S v_0^2 \cos^2 \beta_0} \exp(2k_v S y) + C_1, \quad (29)$$

где константа интегрирования определяется вторым из начальных условий (19):

$$C_1 = i_0^2 - \frac{g}{k_v S v_0^2 \cos^2 \beta_0}. \quad (30)$$

Подставляя это выражение в формулу (29), находим выражение для i :

$$\boxed{I-6} \quad i = \sqrt{i_0^2 + g \frac{\exp(2k_v S y) - 1}{k_v S v_0^2 \cos^2 \beta_0}}. \quad (31)$$

Итак, для летящей вниз капли получены две аналитические функции: (27) – для горизонтальной проекции скорости капли и (31) – для тангенса угла наклона траектории. Подставляя их в формулу (15), находим полную скорость капли:

$$\boxed{I-6} \quad v = v_0 \exp(-k_v S y) \sqrt{1 + g \frac{\exp(2k_v S y) - 1}{k_v S v_0^2}}. \quad (32)$$

В полученных функциях неизвестной остается константа k_v , которую назовем параметром модели по скорости. Для определения значения этого параметра в рамках его интервальной оценки (22) выполнено численное моделирование системы дифференциальных уравнений (18) с начальными условиями (19). В исследуемой области значений параметров (см. вводную часть) хорошее соответствие (с отклонением не более 7 %) дают следующие значения k_v :

$$k_v = \left. \begin{cases} \frac{1}{\sin \beta_0} & \text{при } E \leq 0,17; \\ \frac{1}{6} \left(1 + \frac{5}{\sin \beta_0} \right) & \text{при } E > 0,17, \end{cases} \right\} \quad (33)$$

где $E = \frac{y\sqrt{gS}}{v_0 \sin \beta_0}$ – безразмерное число.

Решение для капли нижней струи

Для капли, движущейся вверх, формулы отличаются от записанных выше только знаком перед ускорением g . Поэтому тангенс угла наклона траектории (аналог (31)) записывается так:

$$\boxed{I-6} \quad i = \sqrt{i_0^2 - g \frac{\exp(2k_v S y) - 1}{k_v S v_0^2 \cos^2 \beta_0}}, \quad (34)$$

а формула скорости капли нижней струи имеет вид (аналог (32))

$$\boxed{I-6} \quad v = v_0 \exp(-k_v S y) \sqrt{1 - g \frac{\exp(2k_v S y) - 1}{k_v S v_0^2}}. \quad (35)$$

При этом, поскольку угол β для капли, летящей вверх, может только уменьшаться, для параметра k_v в этом случае применима только нижняя оценка: $k_v \geq 1/\sin \beta_0$. Путем сравнения расчетов по формуле (35) с результатами численного интегрирования установлено, что при $k_v = 1/\sin \beta_0$ отклонение этих результатов не превышает 8 %.

Аналитическое описание траектории капли

Дифференциальное уравнение траектории $dx = dy/i$ при подстановке функции i в виде (31) или (34) не интегрируется в квадратурах. Поэтому для получения инженерного решения соединим начало координат O с произвольной точкой траектории $T(x, y)$ радиус-вектором \vec{r} (рис. 2). Пусть β_r – угол наклона этого радиус-вектора к оси x . В первом приближении примем, что

$$\text{tg } \beta_r \equiv i_r = \frac{i_0 + i}{2}, \quad (36)$$

и взамен дифференциального уравнения $dx = dy/i$ опишем траекторию капли уравнением $x = y/i_r$. Вносимую этим приемом неизвестную погрешность отнесем к параметру модели, другими словами, вместо параметра модели по скорости k_v введем другую постоянную величину k_x , которую назовем *параметром модели по траектории*.

Подставим в уравнение $x = y/i_r$ формулу (36), а в выражениях (31) и (34) для функции i заменим параметр k_v на новый параметр k_x . В результате получим

$$x = \frac{2y}{i_0 + \sqrt{i_0^2 \pm g \frac{\exp(2k_x S y) - 1}{k_x S v_0^2 \cos^2 \beta_0}}}. \quad (37)$$

Знак «+» в подкоренном выражении этой формулы относится к капле верхней струи (движущейся вниз), а

знак «-» – к капле нижней струи (движущейся вверх).

Раскрывая обозначение $i_0 = \text{tg} \beta_0$, формулу (37) можно привести к виду

$$x = \frac{2y \text{ctg} \beta_0}{1 + \sqrt{1 \pm \Omega}}, \quad (38)$$

где $\Omega = g \frac{\exp(2k_x S y) - 1}{k_x S v_0^2 \sin^2 \beta_0}$.

Параметр модели по траектории

Значение параметра k_x определено путем адаптации расчетов по формуле (38) к результатам численного интегрирования уравнения движения капли. В рамках исследуемой области работы форсунок установлены значения параметра k_x , обеспечивающие хорошую интервальную оценку траектории капли:

– *нижнюю оценку* для капли *верхней* струи дают значения

$$\left. \begin{aligned} k_x &= \frac{1}{\sin \beta_0} \quad \text{при } y\sqrt{gS} \leq 0,17 v_0 \sin \beta_0; \\ k_x &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sin \beta_0} \right) \quad \text{при } y\sqrt{gS} > 0,17 v_0 \sin \beta_0; \end{aligned} \right\}$$

– *верхнюю оценку* для капли *нижней* струи дает значение $k_x = \frac{1}{\sin \beta_0}$;

– *верхнюю оценку* для капли *верхней* струи и *нижнюю оценку* для *нижней* струи дает значение $k_x = 1,0$.

Некоторые примеры сравнительных расчетов при $\beta = 30^\circ$ представлены на рис. 3 и 4 соответственно для капель верхней и нижней струи. Погрешность указанных интервальных оценок составляет не более $\pm 5\%$. На основании выполненного анализа в качестве значения параметра k_x , отвечающего средней оценке траектории капли, может быть принято арифметическое среднее из указанных выше значений, т.е.

– *среднюю оценку* для капли *верхней* струи дает значение

$$\left. \begin{aligned} k_x &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sin \beta_0} \right) \quad \text{при } y\sqrt{gS} \leq 0,17 v_0 \sin \beta_0; \\ k_x &= \frac{1}{4} \left(3 + \frac{1}{\sin \beta_0} \right) \quad \text{при } y\sqrt{gS} > 0,17 v_0 \sin \beta_0; \end{aligned} \right\}$$

– *среднюю оценку* для капли *нижней* струи дает значение $k_x = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sin \beta_0} \right)$.

Погрешность расчета по формуле (38) относительно результатов численного моделирования при значении параметра модели k_x по последним трем уравнениям

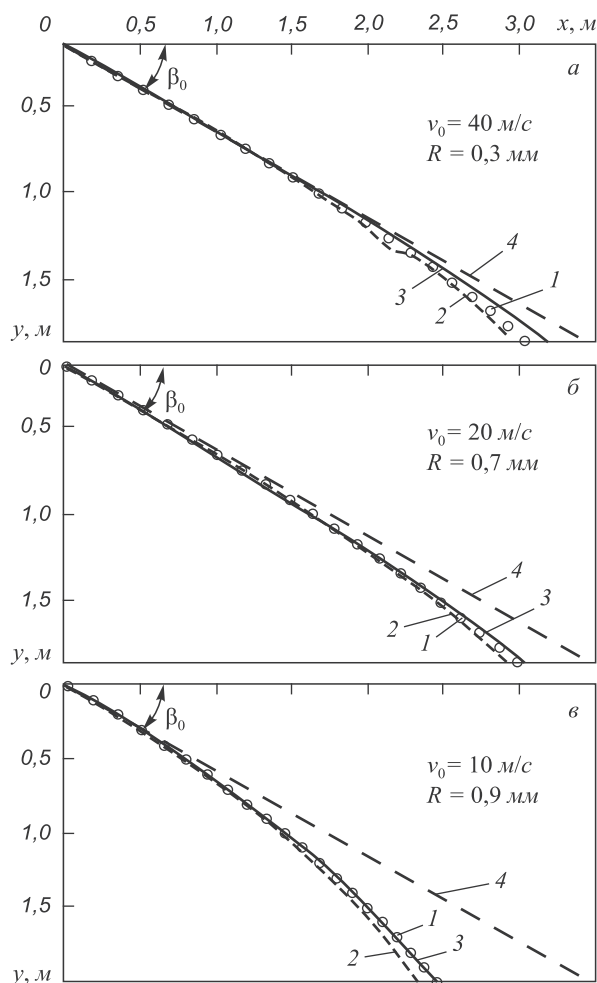


Рис. 3. Траектория капли верхней струи:
1 – численное моделирование; 2 и 3 – функция (38) при параметрах модели (39) и (41); 4 – номинальная траектория без учета силы тяжести и сопротивления среды

составляет не более $\pm 2\%$ во всем исследуемом диапазоне изменения исходных данных.

Выводы. В рамках допущений, правомочных для условий работы форсунок водяного охлаждения горячих металлических листов, получено приближенное аналитическое решение дифференциального уравнения движения капли в поле тяжести с учетом сопротивления парогазовой среды. Значение параметра модели установлено путем сравнения расчетов с результатами численного интегрирования отдельно для капель, движущихся вниз и вверх. В итоге получены формулы для скорости капли и угла наклона ее траектории к горизонтالي. Они учитывают радиус, величину и направление скорости при вылете из форсунки. Погрешность расчета относительно результатов численного моделирования не превышает 8 %. На основе предложенного решения получено приближенное уравнение траектории движения капли. Установлены значения параметра модели, отвечающие верхней, нижней и средней оценке траектории. Расчетная погрешность интервальных оценок не превышает $\pm 5\%$, средней оценки – не более $\pm 2\%$.

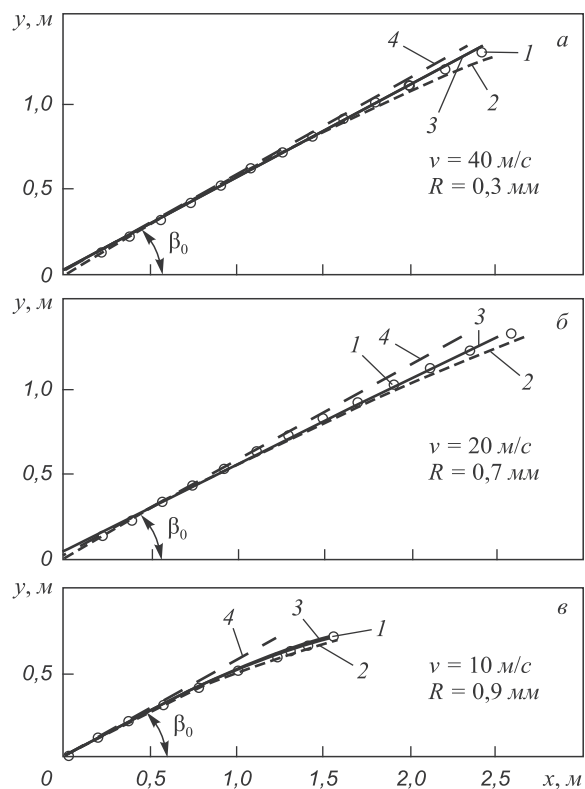


Рис. 4. Траектория капли нижней струи:
1 – численное моделирование; 2 и 3 – функция (38) при параметрах модели (40) и (41); 4 – номинальная траектория без учета силы тяжести и сопротивления среды

Полученные аналитические решения могут стать основой для расчета фактических размеров пятна орошения спрейерной струи на охлаждаемой поверхности с учетом реальной кривизны образующих конуса орошения.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Виноградов А.Г. // Вестник Национального технического университета Украины «Киевский политехнический институт». Сер. «Машиностроение». 2008. № 53. С. 84 – 88.
2. Абрамов Ю.А., Росоха В.Е., Шаповалова Е.А. Моделирование процессов в пожарных стволах. – Харьков: Фолио, 2001. – 195 с.
3. Физические основы рабочего процесса в камерах сгорания воздушно-реактивных двигателей / Б.В. Раушенбах, С.А. Белый, В.Я. Борадачев и др. – М.: Машиностроение, 1964. – 530 с.
4. Евстигнеев В.В., Еськов А.В., Ключков А.В. // Ползуновский вестник. 2006. № 4. С. 58 – 63.
5. Исаченко В.П., Кушнырев В.И. Струйное охлаждение. – М.: Энергоатомиздат, 1984. – 216 с.
6. Лабейш В.Г. Жидкостное охлаждение высокотемпературного металла. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1983. – 172 с.
7. Кутателадзе С.С. Теплопередача и гидродинамическое сопротивление: Справочное пособие. – М.: Энергоатомиздат, 1990. – 367 с.
8. Идельчик И.Е. Справочник по гидравлическим сопротивлениям / Под ред. М.О. Штейнберга. – М.: Машиностроение, 1992. – 672 с.

© 2012 г. Э.Е. Бейгельзимер, Я.Е. Бейгельзимер
Поступила 12 января 2012 г.