

УДК 621.365.2

И.М. Ячиков, Е.М. Костылева

Магнитогорский государственный технический университет

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФОРМЫ ДУГ ПРИ ИХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ. СООБЩЕНИЕ 1

Аннотация. Рассмотрены математическая модель и программные алгоритмы расчета формы двух дуг, горящих между токопроводящей поверхностью и двумя соосными электродами, по которым протекают одинаковые или разные по значению постоянные токи. Приведены результаты моделирования для аргоновых дуг, токи в которых находятся в диапазоне от 1 до 10 кА. Формы осей столбов дуг описаны полиномами второй, третьей и четвертой степени. Установлено, что для описания формы дуги для практических целей достаточно использовать полином третьей степени.

Ключевые слова: электрическая дуга, трехфазный переменный ток, токоподводящая поверхность, форма электрической дуги, электромагнитное взаимодействие.

I.M. Yachikov, E.M. Kostyleva

Magnitogorsk state technical university

THE MATHEMATICAL MODELING OF FORM OF ARCS WITH THEIR ELECTROMAGNETIC COUPLING. REPORT 1

Abstract. The mathematical model and software algorithms of the calculation of the form of two direct current arcs, burning among current-carrying surface and two coaxial electrodes, on which the same or different values direct currents are flowing are considered. Results for argon arc with currents in the range from 1 to 10 kA are represented. Axes forms of the pillars of the arcs are described by polynomials of the second, third and fourth degree. Found that to describe the form of the arc for practical purposes is sufficient to use the third-degree polynomial.

Keywords: electric arc, three-phase alternating current (three-phase AC), current-carrying surface, form of the electric arc, electromagnetic coupling.

E-MAIL: jachikov@mail.ru

Электрические дуги используются в качестве источника тепла в печах, предназначенных для выплавки металлов и сплавов. Столб электрической дуги представляет собой легкоподвижный и деформируемый под воздействием магнитных полей проводник [1]. Форма и взаимодействие дуг оказывают существенное влияние на характер движения металла и шлака, тепловую работу печи, протекание в ней основных технологических процессов, стойкость футеровки и расходующих электродов.

Простейшим случаем электромагнитного взаимодействия двух дуг является их горение между параллельными катодами и токоподводящей поверхностью. Характер взаимодействия дуг зависит от рода протекающих токов. Для постоянных токов, текущих в одном направлении, дуги стягиваются к центру (рис. 1, а), а при токах, имеющих противоположное направление, происходит взаимное отталкивание дуг (рис. 1, б). При конструировании различных дуговых и плазменных печей необходимо учитывать форму дуг, зависящую как от условий их горения и теплообмена, так и от электромагнитных сил, которые определяются величиной протекающих токов,

длиной дуг, расстоянием между ними и конструкцией токоподводов.

Целью данной работы является разработка алгоритмов расчета и моделирование формы осей двух электрических дуг постоянного тока при их электромагнитном взаимодействии.

Математическая модель взаимодействия двух дуг основывалась на использовании модели электрической дуги, рассмотренной в работе [2]. При электромагнитном взаимодействии двух дуг происходит искривление столба каждой дуги, при этом возникают выпрямляющие его силы, обусловленные взаимодействием собственного магнитного поля и тока дуги. Кроме этого, продольный поток газа от катода к аноду создает центробежные силы, стремящиеся также распрямить столб. Суммарное действие электромагнитных и центробежных сил и определяет форму оси столба дуги.

Для описания математической модели вводится декартова система с началом координат, расположенным на расстоянии l от токопроводящей поверхности между осями центров катодов на расстоянии a от каждого (рис. 1, в). Форма оси столба дуги первой дуги опре-

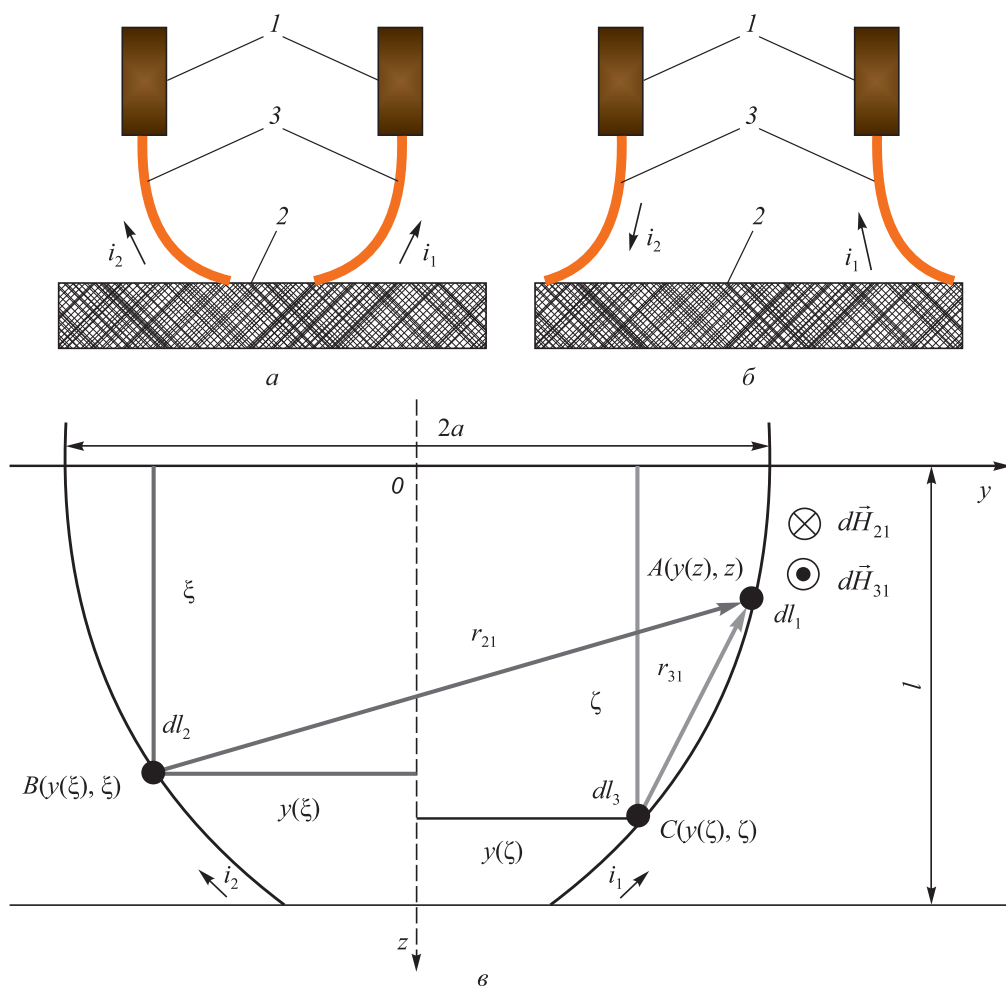


Рис. 1. Схема взаимодействия двух дуг постоянного тока:
 а – протекающих в одном направлении; б – протекающих в разных направлениях; 1 – электрод; 2 – токоподводящая поверхность;
 3 – электрические дуги; в – основные размеры, используемые в математической модели взаимодействия дуг

деляется функцией $y(z)$, второй – $y(\xi)$. Выбираются две произвольные точки на оси первой дуги $A(z, y(z))$, $C(\xi, y(\xi))$ и произвольная точка на оси второй дуги $B(\xi, y(\xi))$. Расстояние от точки A до B обозначается r_{21} , а от точки A до C – r_{31} .

Напряженность магнитного поля, создаваемого в точке A от тока i_2 , протекающего в линейном элементе dl_2 , определяется по закону Био-Савара-Лапласа в дифференциальной форме $d\vec{H}_{21} = \frac{i_2 d\vec{l}_2 \vec{r}_{21}}{4\pi r_{21}^3}$.

Направление вектора $d\vec{H}_{21}$ перпендикулярно плоскости Ozy (вдоль не показанной на рисунке оси Ox). Координаты векторов, входящих в векторное произведение $d\vec{l}_2 \vec{r}_{21}$, имеют вид: $\vec{r}_{21}(\xi - z, -y(\xi) - y(z))$, $d\vec{l}_2 \left(\frac{dy(\xi)}{d\xi}, 1 \right) d\xi$, а расстояние $r_{21} = ((\xi - z)^2 + (-y(\xi) - y(z))^2)^{1/2}$.

Элементарная сила, действующая на ток, протекающий через элемент $d\vec{l}_1$ под действием магнитного поля $d\vec{H}_{21}$, равна $d\vec{F}_{21} = \mu_0 i_1 d\vec{l}_1 d\vec{H}_{21}$. Вектор $d\vec{F}_{21}$ находится в плоскости Ozy и перпендикулярен $d\vec{l}_1$, его модуль равен

$$dF_{21} = \frac{\mu_0 i_1 i_2 \left(\frac{dy(\xi)}{d\xi} (\xi - z) - (-y(\xi) - y(z)) \right) d\xi}{4\pi ((\xi - z)^2 + (-y(\xi) - y(z))^2)^{3/2}} dl_1. \quad (1)$$

Напряженность магнитного поля, создаваемого в точке A током i_1 , протекающим в линейном элементе dl_3 , равна $d\vec{H}_{31} = \frac{i_1 d\vec{l}_3 \vec{r}_{31}}{4\pi r_{31}^3}$. Направление вектора $d\vec{H}_{31}$

противоположно направлению вектора $d\vec{H}_{21}$. Сила, действующая на ток, протекающий через элемент dl_1 под действием магнитного поля $d\vec{H}_{31}$, определяется как

$$d\vec{F}_{31} = \frac{\mu_0 i_1^2 d\vec{l}_1 d\vec{l}_3 \vec{r}_{31}}{4\pi r_{31}^3}.$$

Координаты векторов, входящих в векторное произведение $d\vec{l}_3 \vec{r}_{31}$, имеют вид: $\vec{r}_{31}(\xi - z, y(\xi) - y(z))$, $d\vec{l}_3 \left(\frac{dy(\xi)}{d\xi}, 1 \right) d\xi$, а расстояние $r_{31} = ((\xi - z)^2 + (y(\xi) - y(z))^2)^{1/2}$. Вектор $d\vec{F}_{31}$ находится в плоскости yOz , перпендикулярен $d\vec{l}_1$ и противоположно направлен силе $d\vec{F}_{21}$, его модуль равен

$$dF_{31} = \frac{\mu_0 i_1^2 \left(\frac{dy(\zeta)}{d\zeta} (\zeta - z) - (y(\zeta) - y(z)) \right) d\zeta}{4\pi \left((y(\zeta) + y(z))^2 + (\zeta - z)^2 + y_0^2 \right)^{3/2}} dl_1, \quad (2)$$

где $y_0 = 0,778r_0$ – среднее геометрическое расстояние площади сечения дуги в ее цилиндрической части от самой себя; r_0 – радиус дуги в цилиндрической части столба дуги. Выражение (2) справедливо при постоянном радиусе дуги $r_d = r_0$ и при равномерном распределении плотности тока по сечению столба. Ошибка, вызванная этими допущениями, невелика, так как начальный участок дуги и ее радиус составляют незначительную часть общей ее длины.

Полная электромагнитная сила, действующая на элемент dl_1 , равна $\int_{z_0}^l (dF_{21} - dF_{31})$, где z_0 – расстояние от начального сечения дуги.

Эта сила уравнивается центробежной силой, обусловленной потоком плазмы, текущей вдоль оси столба дуги. На элемент массы dm столба дуги действует центробежная сила $dF_{ц} = \frac{u^2}{R_{кр}} dm$, где $R_{кр}$ – радиус кривизны оси столба, u – скорость газа, движущегося по касательной к радиусу кривизны.

Предполагая, что в единице объема dV плотность постоянна, получим

$$dm = \rho dV = \left(\int_0^{2\pi} \int_0^{r_d} \rho r dr d\varphi \right) dl_1.$$

Вектор $d\vec{F}_{ц}$ находится в плоскости yOz , перпендикулярен $d\vec{l}_1$ и его направление совпадает с вектором $d\vec{F}_{31}$. Принимая, что распределение параметров в дуге осесимметричное, модуль центробежной силы равен

$$|d\vec{F}_{ц}| = \left(\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{r_d} u_z^2 \frac{\rho}{R_{кр}} r dr \right) dl_1 = \left(\frac{2\pi}{R_{кр}} \int_0^{r_d} \rho u^2 r dr \right) dl_1. \quad (3)$$

Считая, что во всем объеме столба дуги локальный и интегральный расходы газа через поперечное сечение дуги определяются как $\rho u = \text{const} = K$ и $G = \pi r_0^2 \rho u$ соответственно. Плотность и скорость газа по радиусу дуги [2]:

$$\rho = \frac{\rho_0}{J_0 \left(\gamma_1 \frac{r}{r_d} \right)}; \quad u = u_0 J_0 \left(\gamma_1 \frac{r}{r_d} \right),$$

где $\gamma_1 = 2,405$ – первый корень функции Бесселя нулевого порядка первого рода; ρ_0 , u_0 – плотность и скорость газа на оси дуги соответственно. Безразмерный радиус дуги выражается как

$$f(z) = \frac{r_d}{r_0} = \left[1 - \exp \left(- \frac{2(A_0 r_0^2 + \gamma_1^2)}{r_0^2 \rho u \frac{C_p}{\lambda}} (z + z_0) \right) \right]^{1/2}; \quad (4)$$

$$z_0 = - \frac{r_0^2 \rho u \frac{C_p}{\lambda}}{2(A_0 r_0^2 + \gamma_1^2)} \ln \left(1 - \left(\frac{r_k}{r_0} \right)^2 \right), \quad (5)$$

где C_p , λ – изобарная теплоемкость и теплопроводность газа соответственно; r_k – радиус дуги на катоде; A_0 – коэффициент пропорциональности при линейаризации удельной мощности излучения от дуги W вдали от ка-

тода, $A_0 = \frac{2 \int_{S_0}^0 W dS}{(S_0 - S_1)^2}$; $S = \int_0^T \lambda dT$ – функция теплопроводности; S_0 , S_1 – значение функции S на оси дуги и на границе ее проводящей области соответственно. Если пренебречь силами вязкости, предполагая, что скорость на оси определяется только силами инерции, тогда

$$u_0(z) = \frac{\gamma_1 \mu_0 i_1^2}{8\pi^2 J_1(\gamma_1) K r_0^2} F(z), \quad (6)$$

$$\text{где } F(z) = \frac{1}{2f^2(z)} \ln \left(\frac{f^2(z)}{r_{к*}^2} \right);$$

$$r_{к*} = \frac{r_k}{r_0} = f(0). \quad (7)$$

Радиус пятна дуги на катоде $r_k(i) = \sqrt{\frac{i}{\pi J}}$, где i – ток дуги, $J = 2500 \text{ А/см}^2$ – плотность тока аргоновой дуги на катоде. Радиус цилиндрической части дуги в зависимости от тока хорошо аппроксимируется степенной зависимостью ($R^2 = 0,999$)

$$r_0(i) = 0,1498 i^{0,3218}.$$

С использованием уравнений (4), (5) и свойств газа форму аргоновой дуги приближенно можно определить как

$$f(z) = [1 - \exp(-0,146(z + z_0))]^{1/2},$$

$$z_0 = -6,865 \ln \left(1 - \left(\frac{r_k}{r_0} \right)^2 \right).$$

Из уравнения (3) с учетом (7) и равенства $\int_0^{r_d} J_0 \left(\gamma_1 \frac{r}{r_d} \right) r dr = \frac{r_d^2 J_1(\gamma_1)}{\gamma_1}$ получено

$$dF_{\text{ц}} = \left(\frac{2\pi(\rho u)^2}{R_{\text{кр}}} \int_0^{\frac{r}{\rho}} \frac{1}{\rho} r dr \right) dl_1 = \left(\frac{\mu_0 i_1^2 f^2(z)}{4\pi R_{\text{кр}}} F(z) \right) dl_1.$$

Подставляя выражение центробежной силы

$$R_{\text{кр}} = \frac{\left(1 + \left(\frac{dy}{dz} \right)^2 \right)^{3/2}}{\left| \frac{d^2 y}{dz^2} \right|}, \text{ имеем}$$

$$dF_{\text{ц}} = \left(\frac{\mu_0 i_1^2 f^2(z) F(z)}{4\pi \left(1 + \left(\frac{dy}{dz} \right)^2 \right)^{3/2}} \left| \frac{d^2 y}{dz^2} \right| \right) dl_1. \quad (8)$$

Таким образом, уравнение равновесия для оси столба дуги $dF_{21} - dF_{31} - dF_{\text{ц}} = 0$, через который протекает ток i_1 , имеет вид

$$\begin{aligned} & \frac{i_2}{i_1} \int_0^l \frac{\left(\frac{dy(\xi)}{d\xi} (\xi - z) - (-y(\xi) - y(z)) \right)}{\left((|y(\xi)| + y(z))^2 + (\xi - z)^2 \right)^{3/2}} d\xi - \\ & - \int_0^l \frac{\left(\frac{dy(\zeta)}{d\zeta} (\xi - z) - (y(\zeta) - y(z)) \right)}{\left((y(\zeta) + y(z))^2 + (\xi - z)^2 + y_0^2 \right)^{3/2}} d\zeta - \\ & - \frac{F(z) f^2(z)}{\left(1 + \left(\frac{dy}{dz} \right)^2 \right)^{3/2}} \left| \frac{d^2 y}{dz^2} \right| = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Данное уравнение относится к классу функционально-дифференциальных. Свойства таких уравнений и методы их решения рассмотрены в работах [3–5]. В отдельных частных случаях найдены аналитические решения, но в общем случае они могут быть получены только приближенно. Численное решение выходит в результате итерационного процесса, точные оценки погрешности получены не для всех случаев. При численных расчетах в качестве критерия для завершения итерационного процесса применяется малое различие результатов, полученных на последовательных шагах процесса. Задача сводится к нахождению функции, которая с приемлемой точностью удовлетворяет уравнению (9). Решение затрудняется тем, что оно нелинейное, так как искомая функция входит в знаменатель правой части и в дифференциальном уравнении имеется модуль.

Для решения подобных интегрально-дифференциальных уравнений обычно используются приближенные итерационные алгоритмы, например метод Пикара [5]. Однако его численная реализация показала, что для данной задачи полученный итерационный процесс

является расходящимся. Для нахождения приближенного решения были предложены и реализованы три алгоритма.

По первому алгоритму предполагалось, что $i_1 = i_2$, поэтому дуги имеют одинаковую форму (зеркально симметричны относительно оси Oz), а неизвестная функция $y(z) = -y(\xi)$ положения оси первой дуги имеет форму параболы $y(z) = a_1 z^2 + b_1 z + c$. Для решения задачи Коши добавлены начальные условия

$$y(0) = a; \quad \left. \frac{dy}{dz} \right|_{z=0} = \alpha, \quad (10)$$

где α – тангенс угла наклона оси дуги в начальном ее сечении.

Используя эти условия, имеем $c = a$, $b_1 = \alpha$, следовательно неизвестным остается коэффициент a_1 , который определялся путем решения нелинейного уравнения (9) при разных z . Усредняя полученные значения, находили искомый коэффициент a_1 [6].

По второму алгоритму также рассматривался случай одинаковых токов $i_1 = i_2$. В отличие от предыдущего алгоритма, искомая функция имеет вид полинома n степени $y(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots + a_n z^n$ [7]. Неизвестные коэффициенты $a_2, a_3, \dots, a_n$ находились как минимум функции нескольких переменных

$$\varphi_1(a_2, a_3, \dots) = \int_0^l \Phi^2 dz = \min \quad (11)$$

или

$$\varphi_2(a_2, a_3, \dots) = \int_0^l |\Phi| dz = \min, \quad (12)$$

где Φ – левая часть уравнения (9).

Третий алгоритм описывает нахождение формы осей двух дуг при разных токах, проходящих через них, $i_1 \neq i_2$. В этом случае для нахождения двух неизвестных функций решалась система двух дифференциальных уравнений (9), записанных для каждой дуги, с граничными условиями:

$$y_1(0) = a; \quad \left. \frac{dy_1}{dz} \right|_{z=0} = \alpha_1; \quad y_2(0) = -a; \quad \left. \frac{dy_2}{dz} \right|_{z=0} = \alpha_2.$$

Для получения приближенного решения было сделано предположение, что искомые функции формы осей столбов дуг имеют вид $y_j(z) = a_{0j} z + a_{1j} z + a_{2j} z^2 + a_{3j} z^3 + \dots + a_{nj}^n$, где $j = 1; 2$ – номер дуги. Из граничных условий, принимая $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, имеем $a_{11} = a_{12} = 0$, $a_{01} = a_{02} = a$. Подлежащие нахождению коэффициенты искомого многочлена $a_{2j}, a_{3j}, \dots, a_{nj}$ находились как минимум функции нескольких переменных [7]. Поскольку система двух дифференциальных уравнений не является совместной, минимизируется невязка следующего

вида $\varphi_3 = \int_0^l (\Phi_1^2 + \Phi_2^2) dz = \min$, где Φ_1, Φ_2 – левая часть уравнения (9), записанная для первой и второй дуги соответственно.

С использованием первого алгоритма создан программный продукт в среде разработки MathCad 14, позволяющий решать нелинейное интегральное уравнение.

Для нахождения неизвестных коэффициентов $a_2, a_3, \dots$ по второму алгоритму создана программа в среде разработки Mathcad 14. С ее помощью можно задавать исходные данные и порядок искомого полинома. Подставляя полиномиальную функцию в уравнения (11) или (12), рассчитывались искомые коэффициенты и значения невязок φ_1, φ_2 .

Приведено моделирование отклонения двух аргоновых дуг при следующих параметрах: $l = 40$ см, $a = 40$ см, $i_1 = i_2 = 9$ кА, $r_0 = 2,84$ см; $\rho_i = 1,16$ г/(см²·с); $r_k/r_0 = 0,378$. На рис. 2 показана форма оси столба дуги, рассчитанная по второму алгоритму с использованием полиномов второй степени при разных расстояниях между дугами. Данный расчет хорошо согласуется с результатами моделирования, полученными по первому алгоритму [6]. Из рис. 2 видно, что с увеличением расстояния между электродами из-за ослабления электромагнитного взаимодействия дуги испытывают все меньшее отклонение от оси катода.

На рис. 3 приведены формы дуг, полученные с использованием второго алгоритма с помощью целевых функций φ_1 или φ_2 для полиномов разной степени. Из рис. 3 видно, что форма оси дуги, построенная с применением целевой функции φ_1 , с увеличением степени полинома сходится к некоей одной кривой, а при использовании функции φ_2 видно различие между положениями дуг. Данный результат был получен и при других расчетах. Поэтому для практических расчетов более целесообразно использовать функцию φ_1 , определяемую по уравнению (11).

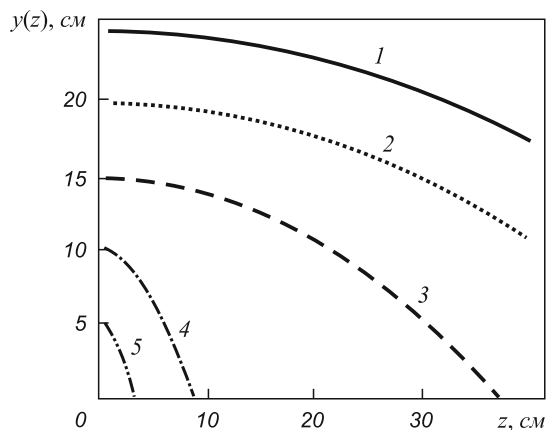


Рис. 2. Положение оси дуги при взаимодействии двух токов $i_1 = i_2 = 9$ кА при $l = 40$ см и разных расстояниях между дугами: 1 – 50 см, $y(z) = -0,0047z^2 + 25$; 2 – 40 см, $y(z) = -0,0058z^2 + 20$; 3 – 30 см, $y(z) = 0,011z^2 + 15$; 4 – 20 см, $y(z) = -0,13z^2 + 10$; 5 – 10 см, $y(z) = -0,48z^2 + 5$

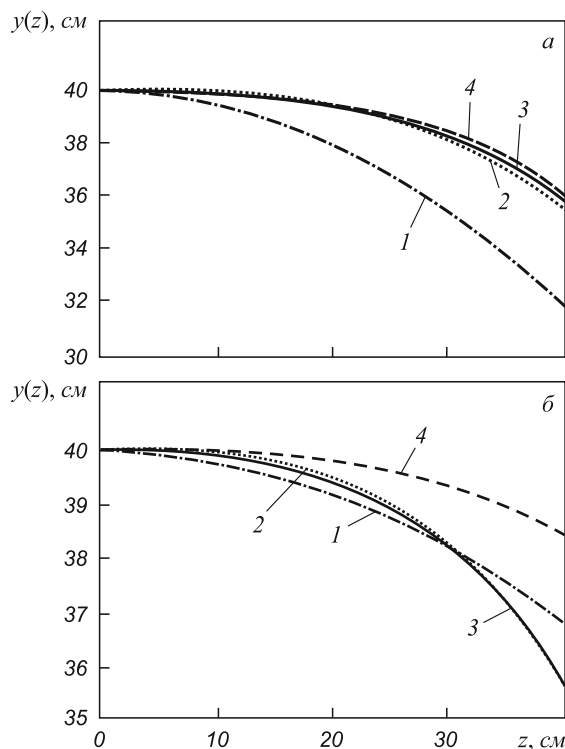


Рис. 3. Положения оси электрической аргоновой дуги при токах $i_1 = i_2 = 9$ кА, построенных с помощью полиномов: 1 – второй, 2 – третьей, 3 – четвертой, 4 – пятой степени, полученные с использованием условий: а – (11); б – (12)

По третьему алгоритму составлена программа в среде разработки и моделирования MatLab, позволяющая находить неизвестные коэффициенты полиномов, определяющих форму осей столбов дуг. В программе реализована возможность задавать токи дуг, физические свойства плазмообразующего газа, длину дуг, расстояние между ними, температуру окружающей среды и другие параметры. Проведено моделирование для двух аргоновых дуг в условиях их горения в дуговой печи, при котором неизвестные функции формы осей столбов дуг описывались полиномами второй, третьей и четвертой степени. Были просчитаны коэффициенты a_{ij} и невязки φ_3 (см. таблицу). С увеличением степени

Значения невязок при различных значениях токов для разных степеней аппроксимирующих полиномов

Ток дуги, кА		Невязка φ_3		
i_1	i_2	вторая степень	третья степень	четвертая степень
2	4	0,00150	0,000157	0,000147
2	9	0,03085	0,011900	0,012000
4	4	0,00720	0,002469	0,002471
4	9	0,07427	0,019730	0,020700
9	9	0,11740	0,017280	0,013900

полинома до трех невязка сначала падает, а при более высоких степенях полинома падает уже незначительно, либо даже начинает расти. Формы дуг, описанные полиномами второй и третьей степени, практически совпадают. На основании проведенного моделирования было установлено, что уравнение дуги целесообразно описывать полиномом третьей степени.

На рис. 4 показаны положения осей столбов дуг при $a = 20$ см, $l = 40$ см для фиксированного тока первой дуги i_1 при разных токах второй дуги i_2 , меньших или равных i_1 . Из рис. 4 видно, что в этих условиях первая дуга ведет себя как относительно более инерционный объект, т.е. ее максимальное отклонение от оси катода меньше, чем у второй дуги. С увеличением суммы токов $i_1 + i_2$ расстояние между дугами уменьшается, что соответствует физике их взаимодействия.

Таким образом, предложена математическая модель для описания формы осей двух дуг, горящих между токопроводящей поверхностью и двумя соосными электродами, по которым протекают одинаковые или разные по значению постоянные токи одного направления. Предложены алгоритмы для нахождения неизвестных коэффициентов полинома, описывающего форму дуги. Данные, полученные в результате моделирования по описанным алгоритмам, существенно не различались.

В результате компьютерного моделирования с помощью специально созданных программ установлено, что для практических целей вполне достаточно использовать полином второй или третьей степени. При уменьшении расстояния между электродами и с увеличением суммы токов дуг их отклонение от оси катода становится более существенным. При разных токах, протекающих через дуги, плазменный столб с большим током ведет себя как относительно более инерционный объект, т.е. его максимальное отклонение от оси катода меньше, чем у дуги с меньшим током. Созданное программное обеспечение может быть использовано при конструировании новых многоэлектродных дуговых или плазменных печей, в системах автоматизированного регулирования их тепловой работы, для оценки стойкости футеровки вблизи горящих дуг.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Ячиков И.М., Зарецкая Е.М. // Изв. вуз. Черная металлургия. 2011. № 1. С. 18 – 20.
2. Бортничук Н.И., Крутянский М.М. Плазменно-дуговые плавильные печи. – М.: Энергоиздат, 1981. – 120 с.

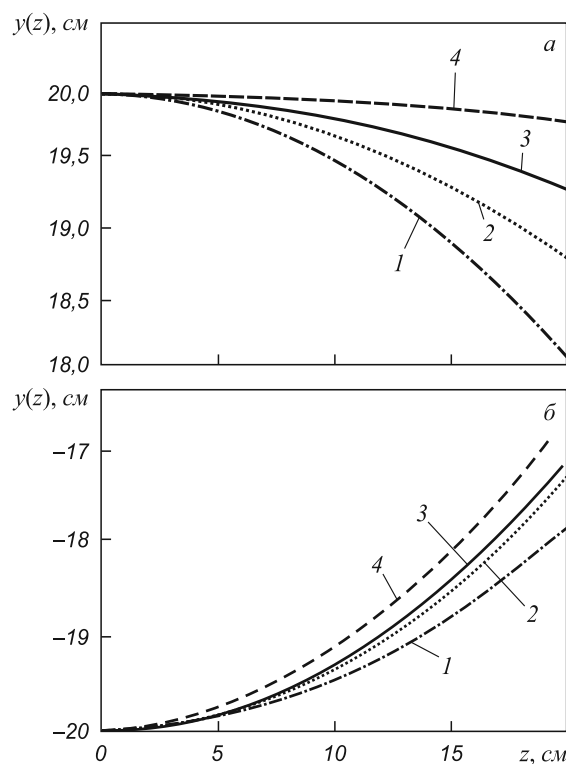


Рис. 4. Положение осей дуг, полученное с использованием полиномов третьей степени при их электромагнитном взаимодействии для а – первой дуги, $i_1 = 10$ кА; б – второй дуги, через которую протекает ток:
 $1 - i_2 = 10$ кА; $2 - i_2 = 5$ кА; $3 - i_2 = 3$ кА; $4 - i_2 = 1$ кА

3. Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. Элементы современной теории функционально – дифференциальных уравнений. Методы и приложения – М.: Институт компьютерных исследований, 2002. – 304 с.
4. Дмитриев С.С. Кузнецов Е.Б. // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2008. № 3. С. 430 – 444.
5. Вержбицкий В.М. Численные методы. Математический анализ и обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Высш. шк., 2001. – 383 с.
6. Ячиков И.М., Костылева Е.М. Положение электрических дуг при их электромагнитном взаимодействии в многоэлектродных дуговых печах // Информационные технологии и системы: Матер. Первой Междунар. конф. – Челябинск: Челяб. гос. ун-т. 2012. С. 36 – 38.
7. Ячиков И.М. Костылева Е.М. Приближенный алгоритм нахождения положения электрических дуг при их электромагнитном взаимодействии в многоэлектродных дуговых печах // Теория и практика тепловых процессов в металлургии: Сб. докл. Междунар. научно-практ. конф. – Екатеринбург: УрФУ, 2012. С. 423 – 426.

© 2014 г. И.М. Ячиков, Е.М. Костылева
Поступила 5 ноября 2013 г.