

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРОПРОВОДНОСТИ МАТЕРИАЛА ПО ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПОЛУОГРАНИЧЕННОГО ТЕЛА

*Соколов А.К., д.т.н., профессор кафедры безопасности
жизнедеятельности (sokolov@bjd.ispu.ru)*

Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина
(153003, Россия, Иваново, ул. Рабфаковская, 34)

Аннотация. Предложено математическое описание процесса теплопроводности в полуограниченном теле и сравнительно простой алгоритм численно-аналитического расчета температуропроводности a_t материала путем решения обратной задачи теплопроводности. Для решения задачи необходимы значения температур поверхностей неограниченной пластины, полученные в результате теплофизического эксперимента. Пластину можно условно считать полуограниченным телом, пока число Фурье $Fo \leq Fo_k$ ($Fo_k \approx 0,04 - 0,06$). Принято, что распределение температур по сечению прогретого слоя пластины R достаточно точно описывается степенной функцией, показатель которой линейно зависит от числа Фурье. Получено простое алгебраическое выражение для расчета a_t в интервале времени Δt по динамике изменения температуры $T(R_n, \tau)$ поверхности пластины толщиной R_n , нагреваемой при граничных условиях второго рода. Температура второй поверхности пластины $T(0, \tau)$ используется только для определения момента времени окончания эксперимента τ_k . Момент времени τ_k , в который температурное возмущение достигнет адиабатной поверхности $x = 0$, можно установить по условию $T(R_n, \tau_k) - T(0, \tau = 0) = 0,1 K$. Предложена методика приближенного расчета динамики изменения глубины прогретого слоя R по значениям R_n , τ_k и τ . Вычисление a_t для интервала времени Δt сводится к итерационному решению системы из трех алгебраических уравнений путем подбора числа Фурье, например, используя стандартную процедуру Microsoft Excel. Выполнена оценка точности расчета a_t по тестовому (исходному) температурному полю пластины из огнеупорного материала толщиной $R_n = 0,05$ м, рассчитанному методом конечных разностей при начальном условии $T(x, \tau = 0) = 300$ ($0 \leq x \leq R_n$) при радиационно-конвективном нагреве. Время нагрева τ_k составило 260 с. Расчет $a_{t,i}$ выполнен для десяти моментов времени $\tau_{i+1} = \tau_i + \Delta t$, $\Delta t = 26$ с. Среднемассовая температура прогретого слоя за все время τ_k составила $T = 302$ К. Среднеарифметическое абсолютное отклонение a_t ($T = 302$) от исходного значения a_n при такой же температуре составило 2,8 %. Применение метода позволит значительно упростить проведение и обработку экспериментов для определения температуропроводности материалов.

Ключевые слова: эксперимент, полуограниченное тело, температурное поле, математическое описание, обратная задача, температуропроводность, численно-аналитический метод, огнеупорный материал.

DOI: 10.17073/0368-0797-2020-6-474-480

Теплофизические характеристики материалов используются при моделировании температурных полей в элементах оборудования, материалов, подвергающихся тепловой обработке или использующихся в ограждениях печей. Достоверность математического моделирования температурных полей в значительной степени зависит от точности значений теплофизических характеристик материалов.

Задачи определения теплофизических характеристик материалов не теряют своей актуальности, поскольку появляются новые материалы, число которых непрерывно растет, изменяются свойства известных материалов в ходе их эксплуатации.

Методы определения теплофизических характеристик материалов в основном основаны на решениях обратных задач теплопроводности по параметрам температурных полей, полученным в результате теплофизического эксперимента.

Обзор и анализ методов определения температуропроводности по нестационарным температурным полям дан в монографиях В.М. Фокина и В.Н. Чернышова

ва [1], Н.П. Жукова и Н.Ф. Майникова [2]. В работе [1] представлена методика для комплексного определения теплофизических характеристик строительных материалов и изделий методом неразрушающего контроля. Обширные обзоры методов решения обратных задач теплопроводности представлены в [3, 4]. В работе [5] показаны решения обратных задач, включая оценку изменения во времени межфазной проводимости между литьем и пресс-формой во время затвердевания алюминия. В монографиях [6, 7] описана методика определения теплофизических свойств материалов металлургического производства [6] и высокопористых строительных материалов [7].

В работах [8, 9] приведены аналитические решения обратной задачи теплопроводности для полуограниченного тела.

Многие методы, описанные в [1, 2], требуют довольно строгого соблюдения граничных условий теплообмена, что усложняет технику проведения эксперимента. Большая часть методов [7 – 20] основана на использовании сложного математического аппарата:

специальных функций, конечных элементов, процедур оптимизации и приближения, решения систем дифференциальных и алгебраических уравнений и др. Применение таких методов в инженерной практике вызывает серьезные затруднения, так как требует специальной физико-математической подготовки.

В работах [21 – 25] для определения величин теплофизических характеристик по известному температурному полю предложено применять довольно простой (инженерный) метод численно-аналитического моделирования процессов теплопроводности, описанный в [23 – 25]. В этом методе используются аналитические решения дифференциального уравнения теплопроводности в виде алгебраических выражений, полученные для расчетного интервала времени Δt .

В данной работе предлагается сравнительно простой метод определения температуропроводности a_T по динамике температур двух поверхностей пластины $T(R_n, \tau)$ и $T(0, \tau)$ толщиной R_n , м. Такой подход позволит значительно упростить подготовку и проведение экспериментального нагрева тела.

Значения a_T определяются решением обратной задачи теплопроводности по математической модели полуграниченного тела в форме неограниченной пластины, которая в начальной стадии нагрева при числе Фурье меньше $Fo \approx 0,06$ может считаться полуграниченным телом.

Для создания адиабатных условий на поверхности рабочей пластины $T(x = 0, \tau)$ предлагается использовать вторую смежную пластину с большей термической массивностью, например пластину из того же материала, но большей толщины. В плоскости сопряжения, в которой установлена вторая термопара (рис. 1), температура изменится только в момент времени τ_k , когда температурное возмущение в рабочей пластине достигнет плоскости сопряжения $x = 0$. Температурное

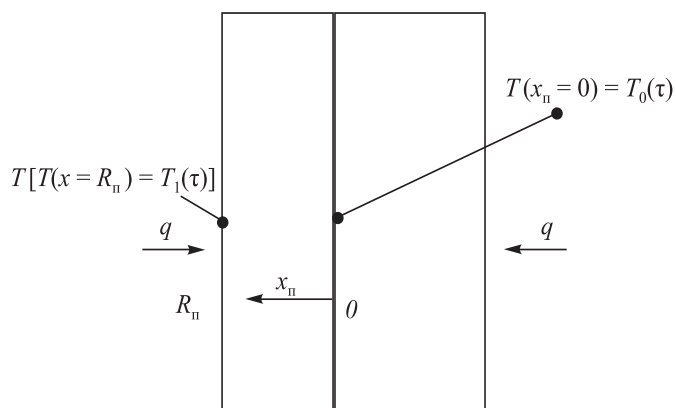


Рис. 1. Схема расположения пластины толщиной R_n , у которой измеряются температуры граней $T(x_n = R_n)$ и $T(x_n = 0)$, и пластины для создания адиабатных условий на поверхности $x_n = 0$

Fig. 1. Layout of the plate with thickness R_n , for which the temperature of the faces $T(x_n = R_n)$ is measured, and $T(x_n = 0)$ and the plate for creation of adiabatic conditions on the surface of the $x_n = 0$

возмущение от второй пластины достигнет плоскости сопряжения позднее, при $\tau > \tau_k$.

Измерения температур $T(R_n, \tau)$ и $T(x = 0, \tau)$ выполняются, пока $\tau \leq \tau_k$. По одному экспериментальному нагреву при начальном условии $T(x_n, \tau = 0) = T_n (0 \leq x_n \leq R_n)$ можно рассчитать только одно значение $a_T (T \approx T_n)$. Для получения табличной зависимости $a_T(T)$ потребуются несколько опытов с другими начальными условиями.

Рассмотрим математическое описание температурного поля неограниченной пластины толщиной R_n , нагреваемой только со стороны $x_n = R_n$. Примем, что в моменты времени τ_i , в которые измеряется температура поверхности $T(R_n, \tau_i) = T_{1,i}$, распределение температур в прогретом слое толщиной R описывается степенной функцией

$$T(X) = a_0 + a_1 X^n, \quad 0 \leq X \leq 1, \quad X = \frac{x}{R}. \quad (1)$$

Запишем дифференциальное уравнение теплопроводности только для прогретого слоя пластины

$$c \frac{\partial T}{\partial \tau}(X, \tau) = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial X} \lambda \frac{\partial T}{\partial X}(X, \tau) \quad (2)$$

с начальным

$$T(X, \tau = 0) = T_n, \quad 0 \leq X \leq 1 \quad (3)$$

и граничными условиями:

$$\frac{\partial T}{\partial X}(X = 0, \tau) = 0; \quad (4)$$

$$\frac{\partial T}{\partial X}(1, \tau) = \frac{R}{\lambda} q, \quad (5)$$

где c – объемная теплоемкость, Дж/(м³·К); x – координата, м; X – относительная координата, $X = \frac{x}{R}$; λ – коэффициент теплопроводности, Вт/(м·К); q – удельный поток теплоты на поверхность $X = 1$ ($x = R, x_n = R_n$), Вт/м².

Отметим, что в непрогретом слое $0 < x_n < R_n - R$, пока $\tau < \tau_k$ температура будет равна начальной, следовательно

$$T(x = 0) = T(X = 0) = T(x_n = 0) = T_n = \text{const.}$$

На рис. 2. показано распределение температур по толщине пластины для нескольких моментов времени, вычисленное по уравнению (1) для примера расчета, приведенного в конце данной работы.

В общем случае теплоемкость, теплопроводность и удельный поток теплоты могут изменяться во времени и зависеть от температур $T(X = 1, \tau)$ и условий теплообмена.

Пусть по данным теплофизического эксперимента известны температуры поверхностей пластины $T_1(\tau_{i+1}) = T(x_n = R_n) = T(x = R) = T(X = 1)$ и $T_0(\tau_{i+1}) = T(x = 0) =$

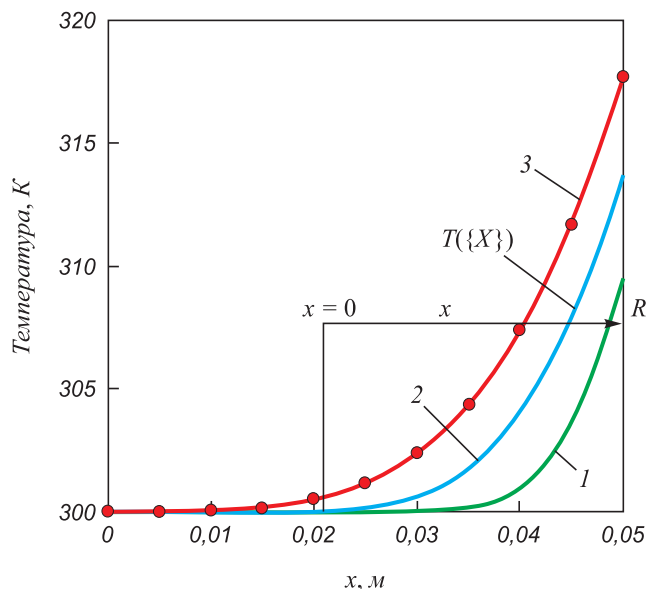


Рис. 2. Распределение температур по толщине пластины для моментов времени $\tau = 52$ (1), 130 (2), 260 (3) с и глубина прогрева пластины для $\tau = 130$ с ($\tau_k = 260$ с)

Fig. 2. Temperature distribution over the plate thickness for time points $\tau = 52$ (1), 130 (2), 260 (3) s and the plate warm-up depth for $\tau = 130$ s ($\tau_k = 260$ s)

$= T(X = 0) = T(x_n = 0)$ соответственно при $X = 1$ и $X = 0$ в моменты времени τ_i ($i = 0, 1, 2, \dots$).

При описании распределения температур по толщине прогретого слоя в конце расчетного интервала времени $\Delta\tau_{i+1} = \tau_{i+1} - \tau_i$ функцией (1) [21– 24] граничное условие (5) запишется в виде

$$\frac{\partial T}{\partial X}(X = 1, \tau) = \frac{R}{\lambda} q = na_1. \quad (6)$$

Из него получим выражение для определения q :

$$q = \frac{\lambda}{R} na_1. \quad (7)$$

Составим уравнение баланса теплоты прогретого слоя пластины ($0 \leq x \leq R, 0 \leq X \leq 1$) для расчетного i -го интервала времени $\Delta\tau$:

$$cR(T_{cp} - T_{cp,ни}) = q\Delta\tau, \quad (8)$$

где $T_{cp,ни}, T_{cp}$ – среднемассовые температуры прогретого слоя R в начале $T_{cp,ни}$ и конце T_{cp} расчетного интервала времени $\Delta\tau$ (здесь и далее для упрощения записи пока не используются индексы, обозначающие номер момента времени).

Для распределения температур (1) величина T_{cp} в конце интервала $\Delta\tau$ найдется интегрированием:

$$T_{cp} = \int_0^1 T(X) dX = \int_0^1 (a_0 + a_1 X^n) dX = a_0 + \frac{a_1}{n+1}. \quad (9)$$

Преобразуем уравнение баланса теплоты (8), подставив в него выражения (7) и (9) для q и T_{cp} :

$$a_0 + \frac{a_1}{n+1} - T_{cp,ни} = \frac{\lambda\Delta\tau}{cR^2} na_1. \quad (10)$$

Принимая во внимание, что температуропроводность a_T равна отношению λ и c ($a_T = \frac{\lambda}{c}$), из уравнения (10) получим выражение для определения температуропроводности:

$$a_T = \frac{a_0 + \frac{a_1}{n+1} - T_{cp,ни}}{na_1 \frac{\Delta\tau}{R^2}}. \quad (11)$$

Коэффициенты a_0 и a_1 в формуле (11) легко найти по известным из эксперимента температурам $T_0(\tau_{i+1})$ и $T_1(\tau_{i+1})$ решением системы двух уравнений (1), записанных для $X = 0$ и $X = 1$:

$$a_0 = T_0(\tau_{i+1}); a_1 = T_1(\tau_{i+1}) - T_0(\tau_{i+1}). \quad (12)$$

В течение времени, пока пластину можно считать полуграниченным телом, температура $T_0(\tau) = T(X = 0, \tau_{i+1}) = T_n$ останется неизменной ($\tau < \tau_k$), так как она находится на границе прогретого и непрогретого слоев пластины. Тогда коэффициенты a_0 и a_1 определятся по формулам

$$a_0 = T_n; a_1 = T_1(\tau_{i+1}) - T_n (\tau < \tau_k), \quad (13)$$

где τ_k – момент времени, в который температура $T_0(\tau_k)$ превысит T_n на ΔT .

Величина τ_k определится по условию

$$T_0(\tau_k) = T_n + \Delta T, \quad (14)$$

где ΔT – чувствительность или погрешность измерения $T(x_n = 0, \tau) = T_0$ (в ходе эксперимента следует лишь засечь время, когда $T(x_n = 0, \tau) = T_0$ возрастет на величину более, чем ΔT (см. рис. 2)).

Таким образом, получено сравнительно простое выражение (11) для определения a_T для расчетного интервала $\Delta\tau$ времени.

В формуле для расчета a_T имеются пока неизвестные параметры:

- n (показатель степени в уравнениях (1) и (11));
- R – толщина прогретого слоя, зависящая от числа Fo, которое, в свою очередь, зависит от a_T, R и τ :

$$Fo = \frac{a_T \tau}{R^2}. \quad (15)$$

Основная задача работы заключалась в установлении взаимосвязи параметров n, R и Fo с известной из эксперимента функцией $T_1(\tau)$.

Для получения приемлемого решения обратной задачи рассмотрены и опробованы различные способы определения n , R и Fo .

Возможные методы расчета n по динамике температурного поля рассмотрены в работах [23, 25]. Значения n можно определить [23, 25]:

- по функции $n(Fo)$;
- по трем температурам $T(X, \tau)$, $X = 0, Z, 1$ ($0 < Z < 1$);
- по решению дифференциального уравнения теплопроводности для плоскости пластины для $X = 1$;
- по двум решениям дифференциального уравнения теплопроводности для $X = 1$ и $0 \leq X \leq 1$ [23, 25].

Для принятых условий в большей степени подошла функция $n(Fo)$ [23, 25], которая была аппроксимирована двумя выражениями:

$$n(Fo) = 8,2052 - 82,74Fo, 0,025 \leq Fo \leq 0,05; \quad (16)$$

$$n(Fo) = 0,7244Fo^{-0,577}, 0,01 \leq Fo \leq 0,075. \quad (17)$$

Функция (16) построена по двум точкам $n(Fo_1 = 0,025)$ и $n(Fo_2 = 0,05)$. Закономерность изменения $R(\tau_i)$ удалось определить, допустив, что число Fo и температуропроводность a_T для всех моментов времени τ_i постоянны. Тогда из соотношений

$$Fo = \frac{a_{T,1}\tau_1}{R_1^2} = \dots = \frac{a_{T,i}\tau_i}{R_i^2} = \frac{a_{T,i+1}\tau_{i+1}}{R_{i+1}^2} = \dots = \frac{a_{T,k}\tau_{i,k}}{R_{i,k}^2}$$

получим

$$R_{i+1}^2 = R_i^2 \frac{\tau_{i+1}}{\tau_i}; R_i^2 = R_{ii}^2 \frac{\tau_i}{\tau_k}. \quad (18)$$

Поскольку толщина пластины R_{ii} известна, а момент времени τ_k определится по условию $T(0, \tau_k) - T_n = \Delta T$ ($\Delta T \approx 0,1$ К), то по формуле (18) можно рассчитать толщину прогретого слоя R_i для каждого момента времени τ_i , в который выполнялось измерение температуры $T_1(\tau_i)$.

Коэффициент теплопроводности λ_T можно рассчитать по преобразованной формуле (7)

$$\lambda_T = \frac{qR}{na_1}, \quad (19)$$

но только для тех экспериментов, в которых будет измерен удельный поток теплоты q .

Процедуру определения температуропроводности a_T рассмотрим на примере расчета a_T по температурам поверхности пластины $R_{ii} = 0,05$ м, нагреваемой от $T_n = 300$ К, если $\tau_i = 0, 26, 52, \dots$ с, $T_1(\tau_i) = 300, 307,1, 309,5, \dots$ К.

1. Пусть по достижению значения температуры $T(x_{ii} = 0, \tau_k) = 300,1$ К определено $\tau_k = 260$ с.

2. Вычислим по уравнению (18) толщину прогретого слоя R_1 для $\tau_1 = 26$ с

$$R_1 = R_{ii} \left(\frac{\tau_1}{\tau_k} \right)^{1/2} = 0,05 \left(\frac{26}{260} \right)^{1/2} = 0,0158 \text{ м.}$$

3. Определим коэффициенты a_0 и a_1 по уравнению (12)

$$a_0 = T_n = 300, a_1 = T_1(\tau_{i+1}) - T_n = 307,1 - 300,0 = 7,1.$$

3. Решим нелинейную систему из трех уравнений путем итерационного подбора числа Fo

$$n(Fo) = 8,2052 - 82,74Fo;$$

$$a_T = \frac{a_0 + \frac{a_1}{n+1} - T_{cp,ii}}{na_1 \frac{\Delta\tau}{R^2}} = \frac{300 + \frac{7,1}{n+1} - 300}{7,1n \frac{(26-0)}{0,0158^2}};$$

$$Fo = a_T \frac{\tau_1}{R_1^2} = a_T \frac{26}{0,0158^2}.$$

Зависимость $n(Fo)$ описывалась формулой (16), так как применение (17) усложняло итерационный процесс.

Для нахождения Fo с точностью 0,0001 на каждом интервале времени использовалась функция «Сервис»/«Подбор параметра» Microsoft Excel. Решением системы уравнений было получено $Fo = 0,0516$, а затем определены $n = 3,934$ и $a_T = 4,954 \cdot 10^{-7}$ м²/с.

4. Рассчитаем среднемассовую температуру прогретого слоя $R_1 = 0,0158$ по уравнению (9)

$$T_{cp,1} = 300 + \frac{7,1}{3,934+1} = 301,4,$$

среднемассовую температуру всей пластины

$$T_{cp,пл} = \frac{T_{cp,1}R_1 + T_n(R_{ii} - R_1)}{R_{ii}} = \frac{301,4 \cdot 0,0158 + 300(0,05 - 0,0158)}{0,05} = 1200,7,$$

толщину прогретого слоя в конце второго интервала $R_2 = 0,05 \left(\frac{52}{260} \right)^{1/2} = 0,0224$ и среднемассовую температуру в начале второго интервала времени

$$T_{cp,ii,2} = \frac{T_{cp,1}R_1 + T_n(R_2 - R_1)}{R_2} = \frac{301,4 \cdot 0,0158 + 300(0,0224 - 0,0158)}{0,0224} = 301,0 \text{ К.}$$

Параметр $T_{cp,пл}$ необязательный, его можно использовать для контроля правильности расчета, так как при $\tau = \tau_k$ должно выполняться равенство $T_{cp,пл} = T_{cp,k}$.

5. Расчеты второго и последующих периодов нагрева выполняются аналогично, начиная с п. 3. Например,

для второго периода с $\tau_2 = 52$ получены следующие результаты: $\Delta\tau_2 = 52 - 26 = 26$ с; $a_0 = 300$; $a_1 = 9,5$ К; $Fo_0 = 0,0532$; $n = 3,805$; $a_T = 5,103 \cdot 10^{-7}$; $T_{cp,2} = 302,0$; $T_{cp,пл} = 300,9$; $R_3 = 0,0274$; $T_{cp,ни,3} = 301,6$.

Для оценки точности метода расчета температуропроводности a_T решением обратной задачи теплопроводности проведено его тестирование. Для тестирования использовалось заранее рассчитанное температурное поле огнеупорного материала с заданными теплофизическими свойствами $a_{и}$, c и $\lambda_{и}$:

$$\lambda_{и}(T) = 0,7416 + 0,00069T, \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}; \quad (21)$$

$$c_{и}(T) = 2100 \cdot (7,688 + 0,25T), \text{ Дж/(м}^3\cdot\text{К)}; \quad (22)$$

$$a_{и}(T) = 4,701 \cdot 10^{-7} + 2,347 \cdot 10^{-10}T - 3,624 \cdot 10^{-14}T^2, \text{ м}^2/\text{с}. \quad (23)$$

Расчет температурного поля неограниченной пластины $R_{и} = 0,05$ м выполнен при $T_{и} = 300$ К, температуре газа $T_r = 350$ К и коэффициентах радиационного $d = 4 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м²·К⁴) и конвективного $\alpha = 30$ Вт/(м²·К) теплообмена с помощью диалоговой программы TRT [23] для моделирования температурных полей.

Решением обратной задачи теплопроводности следовало определить a_T , а затем сравнить их с исходными значениями $a_{и}$ (23), при которых рассчитано исходное (тестовое) температурное поле.

Результаты расчета $T(X=1) = T_1(\tau_i)$, $T(X=0) = T(x_{и} = 0) = T_0(\tau_i)$, $T_{cp,пл}(\tau_i)$ приведены в таблице. В следующих строках таблицы приведены результаты определения a_T предложенным методом.

Температура $T(x_{и} = 0, \tau) = T_0(\tau)$ изменилась на 0,1 К в момент времени $\tau_k = 260$ с (см. таблицу). Коэффициенты a_0 и a_1 определены по уравнению (12), а величины R_j рассчитаны по значению $\tau_k = 260$ с и τ_i по (18). Величина ΔFo_j определялась как абсолютная разность между j -м Fo_j и последующим Fo_{j+1} приближением. Исходные и рассчитанные по уравнению (20) значения $T_{cp,пл}$ практически совпали, следовательно функция (1) довольно точно описывала распределение температур по толщине прогретого слоя пластины (см. рис. 2).

Среднеарифметические величины десяти значений a_T были отнесены к среднемассовой температуре прогретого слоя за время 260 с: $T_a = (300 + 303,9)/2 = 302$ К и получились равными $a_T(T = 302) = 5,25 \cdot 10^{-7}$. Отклонение δ от исходного значения $a_{и}(T = 302) = 5,395 \cdot 10^{-7}$, рассчитанного по уравнению (23), составило $\delta_{a,cp} = 2,8$ %. Для получения a_T при других значениях температур потребуются проведение экспериментов при иных начальных и граничных условиях.

Поскольку представленный метод является приближенным, при его практическом использовании рекомендуется отработать технику эксперимента (граничные условия) на материалах с известной температуропроводностью.

Выводы. Предложено математическое описание взаимосвязи температуропроводности материала a_T на интервале времени нагрева Δt с известными из физического эксперимента температурами поверхностей пластины $T(x_{и} = R_{и}, \tau)$ и $T(x_{и} = 0, \tau)$ и алгоритм поэтапного численно-аналитического расчета a_T .

Для оценки точности метода выполнены расчеты a_T для десяти моментов времени по предварительно

Температуры неограниченной пластины и результаты расчета температуропроводности материала

Temperatures of the unbounded plate and the results of calculation of the material thermal diffusivity

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Время, с	0	26	52	78	104	130	156	182	208	234	260
$T(X=1)$	300,0	307,1	309,5	311,3	312,6	313,8	314,8	315,6	316,4	317,1	317,8
$T(X=0)$	300,0	300,0	300,0	300,0	300,0	300,0	300,0	300,0	300,0	300,0	300,1
$T_{cp,пл}$	300,0	300,5	300,9	301,3	301,7	302,1	302,5	302,9	303,2	303,6	303,9
a_0	–	300,0	300,0	300,0	300,0	300,0	300,0	300,0	300,0	300,0	300,1
a_1	0	7,1	9,5	11,3	12,6	13,8	14,8	15,6	16,4	17,1	17,7
Fo_j	–	0,0516	0,0532	0,0537	0,0546	0,0549	0,0553	0,0559	0,0561	0,0564	0,0554
R_{j+1}	–	0,0158	0,0224	0,0274	0,0316	0,0354	0,0387	0,0418	0,0447	0,0474	0,0500
n	–	3,934	3,805	3,761	3,686	3,664	3,632	3,583	3,565	3,541	3,619
$T_{cp,ни,i}$	300,0	300,0	301,0	301,6	302,1	302,4	302,7	303,0	303,2	303,4	303,6
$T_{cp}(\tau_i)$	300,0	301,4	302,0	302,4	302,7	303,0	303,2	303,4	303,6	303,8	303,9
$T_{cp,пл}$	300,0	300,5	300,9	301,3	301,7	302,1	302,5	302,8	303,2	303,6	303,9
$a_T \cdot 10^7$	–	4,954	5,103	5,156	5,242	5,268	5,305	5,361	5,383	5,411	5,320
Fo_{j+1}	–	0,0515	0,0531	0,0536	0,0545	0,0548	0,0552	0,0558	0,0560	0,0563	0,0553
$\Delta Fo_j \cdot 10^4$	–	1,009	1,008	1,000	1,000	0,999	0,999	0,996	0,998	1,000	0,997

рассчитанному (тестовому) температурному полю неограниченной пластины как полуограниченного тела ($Fo < 0,6$) при $T_n = 300$ К, температуре газа $T_g = 350$ К и радиационно-конвективном теплообмене. Показано, что для принятых условий теплообмена среднее значение температуропроводности $a_T (T = 302)$ определено с погрешностью 2,8 %.

Применение метода позволит значительно упростить проведение и обработку экспериментов для определения теплофизических характеристик теплоизоляционных и огнеупорных материалов.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Фокин В.М., Чернышов В.Н. Неразрушающий контроль теплофизических характеристик строительных материалов. – М.: Издательство Машиностроение-1, 2004. – 212 с.
2. Жуков Н.П., Майникова Н.Ф. Многомодельные методы и средства неразрушающего контроля теплофизических свойств материалов и изделий. – М.: Издательство Машиностроение-1, 2004. – 288 с.
3. Savija I., Culham J.R., Yovanovich M.M., Marotta E.E. Review of thermal conductance models for joints incorporating enhancement materials // Journal of Thermophysics and Heat Transfer. 2003. Vol. 17. No. 1. P. 43 – 52.
4. Zhao D.L., Qian X., GuX.K. etc. Measurement techniques for thermal conductivity and interfacial thermalconductance of bulk and thin film materials // Journal of Electronic Packaging. 2016. Vol. 138. No. 4. Article 040802.
5. Grysa Kr. Inverse heat conduction problems. – In book: Heat Conduction – Basic Research. Intech Open. Available at URL: <https://www.intechopen.com/books/heat-conduction-basic-research/inverse-heat-conduction-problems>.
6. Определение теплофизических свойств материалов металлургического производства / Б.П. Юрьев, В.А. Гольцев, В.И. Матюхин, О.Ю. Шешуков. – Екатеринбург: ООО «УИПЦ», 2014. – 180 с.
7. Bouguerra A., Ait-Mokhtar A., Amiri O., Diop M. B. Measurement of thermal conductivity, thermal diffusivity and heat capacity of highly porous building materials using transient plane source technique // Int. Communications in Heat and Mass Transfer. 2001. Vol. 28. No. 8. P. 1065 – 1078.
8. Еремин А.В., Стефанюк Е.В., Абишева Л.С. Идентификация источника теплоты на основе аналитического решения задачи теплопроводности // Изв. вуз. Черная металлургия. 2016. Т. 59. № 5. С. 339 – 346.
9. Зверев В.Г., Назаренко В.А., Теплоухов А.В. Определение теплофизических характеристик материалов при тепловом воздействии постоянной мощности // Теплофизика и аэромеханика. 2011. Т. 18. № 3. С. 493 – 502.
10. Lin J.H., Chen C.K., Yang Y.T. Inverse method for estimating thermal conductivity in one-dimensional heat conduction problems // Journal of Thermophysics and Heat Transfer. 2001. Vol. 15. No. 1. P. 34 – 41.
11. Tervola P. A method to determine the thermal conductivity from measured temperature profiles // Int. Journal of Heat and Mass Transfer. 1989. No. 32. P. 1425 – 1430.
12. Yang C.Y. Estimation of the temperature-dependent thermal conductivity in inverse heat conduction problems // Applied Mathematical Modelling. 1999. Vol. 23. No. 6. P. 469 – 478.
13. Alhama F., Zueco J., González Fernández C.F. An efficient method for simultaneously determining thermal conductivity and specific heat solids in the form of an inverse problem // Int. Communications in Heat and Mass Transfer. 2004. Vol. 31. No. 7. P. 929 – 937.
14. Zueco J., Alhama F., González-Fernández C.F. Inverse determination of temperature-dependent thermal conductivity using network simulation method // Journal of Materials Processing Technology. 2006. Vol. 174. No. 1 – 3. P. 137 – 144.
15. Liu C.S. One-step GPS for the estimation of temperature-dependent thermal conductivity // Int. Journal of Heat and Mass Transfer. 2006. Vol. 49. No. 17 – 18. P. 3084 – 3093.
16. Kim S., Kim M.C., Kim K.Y. Non-iterative estimation of temperature-dependent thermal conductivity without internal measurements // Int. Journal Heat and Mass Transfer. 2003. Vol. 46. No. 10. P. 1801 – 1810.
17. Chen H.T., Lin J.Y. Simultaneous estimations of temperature-dependent thermal conductivity and heat capacity // Int. Journal of Heat and Mass Transfer. 1998. Vol. 41. No. 14. P. 2237 – 2244.
18. Changa Chia-Lung, Chang Ming. Inverse determination of thermal conductivity using semi-discretization method // Applied Mathematical Modelling. 2009. Vol. 33. No. 3. P. 1644 – 1655.
19. Weizhen Pan, Fajun Yi, Songhe Meng. Temperature-dependent thermal properties measurement by solving inverse heat transfer problems // Measurement Science and Technology. 2016. Vol. 27. No. 7. Article 075005.
20. Rostamian M., Shahrezaee A. Application of meshless methods for solving an inverse heat conduction problem // European Journal of Pure and Applied Mathematics. 2016. Vol. 9. No. 1. P. 64 – 83.
21. Соколов А.К. Определение температуропроводности материалов численно-аналитическим методом // Заводская лаборатория. 2014. № 11. С. 36 – 39.
22. Соколов А.К. Решение обратной задачи теплопроводности для симметричного температурного поля пластины, аппроксимированного степенными функциями // Известия АН. Энергетика. 2017. № 6 – 1. С. 108 – 118.
23. Соколов А.К. Математическое моделирование нагрева металла в газовых печах. – Иваново: Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина, 2011. – 396 с.
24. Соколов А.К. Численно-аналитический метод расчета температурного поля неограниченной пластины при малых числах Фурье // Изв. вуз. Черная металлургия. 2007. № 3. С. 23 – 28.
25. Соколов А.К. Численно-аналитический метод расчета температурных полей многослойных пластин в начальной стадии нагрева // Изв. АН. Энергетика. 2009. № 1. С. 138 – 151.

Поступила в редакцию 10 октября 2019 г.

После доработки 4 февраля 2020 г.

Принята к публикации 2 июня 2020 г.

IZVESTIYA VUZOV. CHERNAYA METALLURGIYA = IZVESTIYA. FERROUS METALLURGY. 2020. VOL. 63. NO. 6, PP. 474–480.

DETERMINATION OF THERMAL DIFFUSIVITY OF THE MATERIAL BY NUMERICAL-ANALYTICAL MODEL OF A SEMI-BOUNDED BODY

A.K. Sokolov

Lenin Ivanovo State Power Engineering University, Ivanovo, Russia

Abstract. A mathematical description of the material thermal diffusivity a_T in a semi-bounded body is proposed with a relatively simple algorithm

for its numerical and analytical by solving the inverse problem of thermal conductivity. To solve the problem, it is necessary to obtain the temperature values of the unbounded plate as a result of a thermophysical experiment. A plate can be conditionally considered as a semi-bounded body as long as the Fourier number $Fo \leq Fo_k (Fo_k \approx 0.04-0.06)$. It is assumed that the temperature distribution over cross-section of the

heated layer of the plate R is sufficiently described by a power function whose exponent depends linearly on the Fourier number. A simple algebraic expression is obtained for calculating a_{τ} in the time interval $\Delta\tau$ from the dynamics of temperature change $T(R_n, \tau)$ of a plate surface with thickness R_n heated under boundary conditions of the second kind. Temperature of the second surface of the plate $T(0, \tau)$ is used only to determine the time of the end of experiment τ_k . The moment of time τ_k , in which the temperature perturbation reaches the adiabatic surface $x = 0$, can be set by the condition $T(R_n, \tau_k) - T(0, \tau = 0) = 0,1$ K. The method of approximate calculation of dynamics of changes in depth of the heated layer R by the values of R_n , τ_k , and τ is proposed. Calculation of a_{τ} for the time interval $\Delta\tau$ is reduced to an iterative solution of a system of three algebraic equations by matching the Fourier number, for example, using a standard Microsoft Excel procedure. Estimation of the accuracy of a_{τ} calculation was made by the test (initial) temperature field of the refractory plate with the thickness $R_n = 0.05$ m, calculated by the finite difference method under the initial condition $T(x, \tau = 0) = 300$ ($0 \leq x \leq R_n$) at radiation-convective heating. The heating time was 260 s. Calculation of a_{τ_i} was performed for 10 time moments $\tau_{i+1} = \tau_i + \Delta\tau$, $\tau = 26$ s. Average mass temperature of the heated layer for the whole time was $T = 302$ K. The arithmetic-mean absolute deviation of a_{τ} ($T = 302$ K) from the initial value at the same temperature was 2.8 %. Application of the method will simplify the conduct and processing of experiments to determine the thermal diffusivity of materials.

Keywords: experiment, semi-bounded body, temperature field, mathematical description, inverse problem, thermal diffusivity, numerical-analytical method, refractory material.

DOI: 10.17073/0368-0797-2020-6-474-480

REFERENCES

- Fokin V.M., Chernyshov V.N. *Nerazrushayushchii kontrol' teplofizicheskikh kharakteristik stroitel'nykh materialov* [Nondestructive control of thermophysical characteristics of building materials]. Moscow: Izdatel'stvo Mashinostroenie-1, 2004, 212 p. (In Russ.).
- Zhukov N.P., Mainikova N.F. *Mnogomodel'nye metody i sredstva nerazrushayushchego kontrolya teplofizicheskikh svoistv materialov i izdelii* [Multi-model methods and means of nondestructive control of materials and products thermophysical properties]. Moscow: Mashinostroenie-1, 2004, 288 p. (In Russ.).
- Savija I., Culham J.R., Yovanovich M.M., Marotta E.E. Review of thermal conductance models for joints incorporating enhancement materials. *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*. 2003, vol. 17, no. 1, pp. 43–52.
- Zhao D.L., Qian X., Gu X.K., Jajja S.A., Yang R.G. Measurement techniques for thermal conductivity and interfacial thermal conductance of bulk and thin film materials. *Journal of Electronic Packaging*. 2016, vol. 138, no. 4, article 040802.
- Grysa Kr. Inverse heat conduction problems. In: *Heat Conduction – Basic Research*. IntechOpen. Available at URL: <https://www.intechopen.com/books/heat-conduction-basic-research/inverse-heat-conduction-problems>
- Yur'ev B.P., Gol'tsev V.A., Matyukhin V.I., Sheshukov O.Yu. *Opreделение teplofizicheskikh svoistv materialov metallurgicheskogo proizvodstva: Nauchnaya monografiya* [Determination of thermophysical properties of metallurgical production materials: Sci. Monograph]. Ekaterinburg: OOO "UIPTs", 2014, 180 p. (In Russ.).
- Bouguerra A., Ait-Mokhtar A., Amiri O., Diop M. B. Measurement of thermal conductivity, thermal diffusivity and heat capacity of highly porous building materials using transient plane source technique. *Int. Communications in Heat and Mass Transfer*. 2001, vol. 28, no. 8, pp. 1065–1078.
- Eremin A.V., Stefanyuk E. V., Abisheva L. S. Heat source identification based on analytical solutions of the heat-conduction problem. *Izvestiya. Ferrous Metallurgy*. 2016, vol. 59, no. 5, pp. 339–346.
- Zverev V. G., Nazarenko V. A., Teploukhov A.V. Determination of thermophysical characteristics of materials under thermal influence of constant power. *Teplofizika i aeromekhanika*. 2011, vol. 18, no. 3, pp. 493–502. (In Russ.).
- Lin J.H., Chen C.K., Yang Y.T. Inverse method for estimating thermal conductivity in one-dimensional heat conduction problems. *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*. 2001, vol. 15, no. 1, pp. 34–41.
- Tervola P. A method to determine the thermal conductivity from measured temperature profiles. *Int. Journal of Heat and Mass*. 1989, no. 32, pp. 1425–1430.
- Yang C.Y. Estimation of the temperature-dependent thermal conductivity in inverse heat conduction problems. *Applied Mathematical Modelling*. 1999, vol. 23, no. 6, pp. 469–478.
- Alhama F., Zueco J., González Fernández C.F. An efficient method for simultaneously determining thermal conductivity and specific heat solids in the form of an inverse problem. *Int. Communications in Heat and Mass Transfer*. 2004, vol. 31, no. 7, pp. 929–937
- Zueco J., Alhama F., González-Fernández C.F. Inverse determination of temperature-dependent thermal conductivity using network simulation method. *Journal of Materials Processing Technology*. 2006, vol. 174, no. 1–3, pp. 137–144.
- Liu C.S. One-step GPS for the estimation of temperature-dependent thermal conductivity. *Int. Journal of Heat and Mass Transfer*. 2006, vol. 49, no. 17–18, pp. 3084–3093.
- Kim S., Kim M.C., Kim K.Y. Non-iterative estimation of temperature-dependent thermal conductivity without internal measurements. *Int. Journal of Heat and Mass Transfer*. 2003, vol. 46, no. 10, pp. 1801–1810.
- Chen H.T., Lin J.Y. Simultaneous estimations of temperature-dependent thermal conductivity and heat capacity. *Int. Journal of Heat and Mass Transfer*. 1998, vol. 41, no. 14, pp. 2237–2244.
- Changa Chia-Lung, Chang Ming. Inverse determination of thermal conductivity using semi-discretization method. *Applied Mathematical Modelling*. 2009, vol. 33, no. 3, pp. 1644–1655.
- Weizhen Pan, Fajun Yi, Songhe Meng. Temperature-dependent thermal properties measurement by solving inverse heat transfer problems. *Measurement Science and Technology*. 2016, vol. 27, no. 7, article 075005.
- Rostamian M., Shahrezaee A. Application of meshless methods for solving an inverse heat conduction problem. *European Journal of Pure and Applied Mathematics*. 2016, vol. 9, no. 1, pp. 64–83.
- Sokolov A.K. Determination of thermal diffusivity of materials by numerical-analytical method. *Zavodskaya laboratoriya*. 2014, no. 11, pp. 36–39. (In Russ.).
- Sokolov A.K. Thermal conductivity problem solution by numerical analytical method of temperature fields conjunction. *Izvestiya AN. Energetika*. 2017, no. 6–1, pp. 108–118. (In Russ.).
- Sokolov A.K. *Matematicheskoe modelirovanie nagreva metalla v gazovykh pechakh* [Mathematical modeling of metal heating in gas furnaces]. Ivanovo: Ivanovskii gosudarstvennyi energeticheskii universitet, 2011, 396 p. (In Russ.).
- Sokolov A.K. Numerical-analytical method for calculating the temperature field of an unbounded plate at small Fourier numbers. *Izvestiya. Ferrous Metallurgy*. 2007, no. 3, pp. 23–28.
- Sokolov A.K. Numerical-analytical method for calculating temperature fields of multilayer plates in the initial stage of heating. *Izv. AN Energetika*. 2009, no. 1, pp. 138–151. (In Russ.).

Information about the author:

A.K. Sokolov, Dr. Sci. (Eng.), Professor of the Chair of Life Safety (sokolov@bjd.ispu.ru)

Received October 10, 2019

Revised February 4, 2020

Accepted June 2, 2020