ISSN: 0368–0797. Известия высших учебных заведений. Черная металлургия. 2017. Том 60. № 2. С. 164 – 169.

УДК 669.046: 536.24

РАСЧЕТ ТЕМПЕРАТУР И ТЕРМИЧЕСКИХ НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ КОЭФФИЦИЕНТЕ ТЕПЛООБМЕНА, ЗАВИСЯЩЕМ ОТ ТЕМПЕРАТУРЫ ПОВЕРХНОСТИ ТЕЛА

Горбунов А.Д., *д.т.н., профессор кафедры «Теплоэнергетика»* (gorbunov@tpte.ru)
Уклеина С.В., *аспирант кафедры «Теплоэнергетика»* (84sveta28@mail.ru)

Днепродзержинский государственный технический университет
(51918, Украина, г. Днепродзержинск, Днепропетровская обл., ул. Днепростроевская, 2)

Аннотация. Впервые записана математическая постановка задачи, учитывающая зависимость коэффициента теплоотдачи от температуры поверхности в случае нагрева (охлаждения) тел правильной геометрической формы в виде неограниченной пластины, цилиндра и шара при свободной конвекции в неограниченном объеме, тем самым делая задачу теплопроводности нелинейной. Получено решение для модели термически тонкого тела. Разработана методика расчета температур поверхности на начальной стадии. На основе интегральных линеаризующих преобразований разработана инженерная методика расчета полей температур и осевых термических напряжений в квазистационарной стадии нагрева (охлаждения) тел правильной геометрической формы при коэффициенте теплообмена, зависящем от температуры поверхности по степенному закону в зависимости от режима свободной конвекции: ламинарного, переходного или турбулентного. Проверка решений на модели постоянного коэффициента теплоотдачи показала, что погрешность решений является приемлемой для инженерных расчетов, а неучет зависимости коэффициента теплоотдачи от температуры может привести к большим неточностям. Приведены формулы для расчета осевых термических напряжений в любой точке тела, на поверхности и в центре.

Ключевые слова: нагрев, охлаждение, тела канонической формы, начальная и квазистационарная стадии, коэффициент теплообмена, зависящий от температуры поверхности, температурные поля, термические напряжения, инженерная методика расчета.

DOI: 10.17073/0368-0797-2017-2-164-169

Существует большое количество работ, например [1 – 17], посвященных аналитическому расчету температур при нестационарном коэффициенте теплообмена и температуре внешней среды. При этом не известны исследования при коэффициенте теплоотдачи, зависящем от температуры, за исключением сведений из работы [3], в которых отмечено, что «рекомендуемая методика делает возможным проведение расчетов в случае, когда критерий теплообмена зависит от температуры поверхности тела».

В случае нагрева (охлаждения) тел в среде с температурой $T_с$ при свободной конвекции в неограниченном объеме коэффициент теплоотдачи α может быть определен из критериального уравнения М.А. Михеева [18]:

$$\mathrm{Nu} = C\mathrm{Ra}^n \varepsilon_T, \tag{1}$$

или в размерном виде

$$\alpha = G\Delta T^{\,n},\ \text{Вт/(м}^2\cdot\text{К)}; \tag{2}$$

здесь Ra = GrPr – критериальное число Рэлея; $\mathrm{Gr} = \dfrac{g\beta\Delta T l_x^3}{v^2}$ – критериальное число Грасгофа; Pr – критериальное число Прандтля; $\varepsilon_T = \left(\dfrac{\mathrm{Pr}_с}{\mathrm{Pr}_п}\right)^{0,25}$ – поправочный коэффициент (для газов $\varepsilon_T \approx 1$); $\Delta T = |T_с - T_п|$ – температурный напор, °С; $T_п$ – температура поверхности тела; $G = \dfrac{C\lambda\varepsilon_T}{l_x}\left(\dfrac{g\beta l_x^3\,\mathrm{Pr}}{v^2}\right)^n$ – комплекс величин.

Постоянные C и n уравнения (1) существенно зависят от числа Рэлея [18], т.е. от режима свободной конвекции, что можно увидеть из представленных ниже данных:

Значения постоянных	Значения числа Рэлея для режимов свободной конвекции		
	ламинарного (Ra < 100)	переходного (10^2 < Ra < 10^{10})	турбулентного (Ra > 10^{10})
C	1,18	0,50	0,15
n	1/8	1/4	1/3

Постановка задачи. Математическая постановка задачи симметричного нагрева (охлаждения) тел простой геометрической формы от начальной температуры T_0 до температуры среды $T_с$ имеет следующий вид:

$$\frac{\partial\vartheta(X,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}} = \frac{\partial^2\vartheta}{\partial X^2} + \frac{k-1}{X}\frac{\partial\vartheta}{\partial X}; \tag{3}$$

$$\vartheta(X, 0) = \vartheta_0 = 1; \tag{4}$$

$$\frac{\partial \vartheta(0,\,\mathrm{Fo})}{\partial X} = 0; \tag{5}$$

$$-\frac{\partial \vartheta(1,\,\mathrm{Fo})}{\partial X} = \mathrm{Bi}\vartheta_n^m(\mathrm{Fo}) \equiv Q(\mathrm{Fo}), \tag{6}$$

где $\vartheta = \dfrac{T(x,\tau) - T_c}{\Delta T_0}$; $\Delta T_0 = (T_0 - T_c)$ – максимально возможный перепад температур, °C; $\vartheta_п(\mathrm{Fo}) = \vartheta(1,\,\mathrm{Fo})$ – относительная температура на поверхности; $X = x/R_0$; R_0 – характерный размер тела, м; $\mathrm{Fo} = a\tau/R_0^2$ и $\mathrm{Bi} = a_m R_0/\lambda$ – критериальные числа Фурье и Био; k – фактор геометрической формы, равный 1, 2, 3 соответственно для пластины, цилиндра и шара; $m = n + 1$.

При выводе граничного условия (6) было учтено, что удельный тепловой поток согласно закону Ньютона–Рихмана запишется как $q = \alpha\Delta T$, а с учетом уравнения (2) – как $q = G\Delta T^m$. Тогда, формируя число Био, получим $a_m = G\Delta T_0^n$ – максимально возможный коэффициент теплоотдачи. Следует отметить, что уравнение (6) делает исходную задачу теплопроводности нелинейной.

Решение задачи. Сначала решим задачу на начальной стадии нагрева, когда Fo < 0,1. Следуя методике, разработанной в работе [19], получим уравнение m-ой степени для определения относительной температуры на поверхности:

$$NZ^m + Z - 1 = 0, \tag{7}$$

где $Z = \dfrac{\vartheta_n(\mathrm{Fo})}{\vartheta_0}$; $N = Hy$; $y = \mathrm{Ti} = \mathrm{Bi}\sqrt{\mathrm{Fo}} \equiv \gamma\sqrt{\tau}$ – критериальное число Тихонова (модифицированное время); $\gamma = a_m/b$; $b = \sqrt{\lambda c\rho}$ – коэффициент тепловой активности; $H = p = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}$ при малых временах процесса ($y < 1$) и $H = \sqrt{\pi}$ при $y >> 1$.

С использованием метода касательных Ньютона в работе [19] была получена следующая итерационная формула для расчета параметра Z по уравнению (7):

$$Z_{k+1} = Z_k - \frac{f(Z_k)}{f'(Z_k)} = \frac{1 + (m-1)NZ_k^m}{1 + mNZ_k^{m-1}}, \tag{8}$$

где $k = 0, 1, 2,\ldots$ – номер итерации.

Число итераций по уравнению (8), необходимое для достижения заданной точности ε, когда $|Z_{k+1} - Z_k| \le \varepsilon$, можно значительно сократить, если правильно выбрать первое приближение. Полагая в уравнении (8) $Z_k = 1$, получим соотношение

$$Z = \frac{1 + (m-1)N}{1 + mN} = 1 - \frac{N}{1 + mN}, \tag{9}$$

справедливое при малых N. Аналогичное выражение можно получить, разлагая функцию (7) в ряд Тейлора:

$$Z \equiv 1 - N + mN^2 - \frac{m(3m-1)N^3}{2} +,\ \ldots,\ N < 1. \tag{10}$$

Для случая больших N приближенную асимптотику получим, решая уравнение (7) при $Z = 0$. Тогда $Z = N^{-1/m}$, или более точно, после подстановки в выражение (8):

$$Z = \frac{1}{1/m + N^{1/m}}. \tag{11}$$

Для проведения экспресс расчетов, не нуждающихся в особой точности, при определении $Z(N)$ можно воспользоваться графиком, который легко строится по формуле (7), разрешенной относительно N:

$$N = \frac{1 - Z}{Z^m}. \tag{12}$$

Окончательно, после определения параметра Z, температура поверхности определится как $\vartheta_п(\mathrm{Fo}) = Z\vartheta_0 \equiv Z$.

Здесь и далее проверку на адекватность полученных решений будем осуществлять путем сопоставления с точным решением при постоянном коэффициенте теплообмена, когда показатель степени $n = 0$. Полагая в уравнении (7) $m = 1$, получим

$$Z = \vartheta_n(\mathrm{Fo}) = \frac{1}{1 + N} = \frac{1}{1 + Hy}, \tag{13}$$

или после разложения в ряд при малых ($y < 1$) $\vartheta_п(\mathrm{Fo}) \approx \approx 1 - py$ и больших ($y > 1$) временах процесса имеем $\vartheta_n(\mathrm{Fo}) \approx \dfrac{1}{\sqrt{\pi}y}$.

Точное решение [9] при малых числах Фурье имеет вид

$$\vartheta_n^T(\mathrm{Fo}) = \varphi(y) = e^{y^2}(1 - erfy), \tag{14}$$

где $erfy = p\int\limits_0^y e^{-x^2}dx$ – функция ошибок Гаусса; $p = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}$.

Функцию $\varphi(y)$ можно разложить в ряд при малых ($y < 1$) $\varphi(y) \approx 1 - py + y^2 - \dfrac{2py^3}{3} + \dfrac{y^4}{2}! \ldots \approx 1 - py$ и больших ($y > 1$) аргументах: $\varphi(y) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}y}\left(1 - \dfrac{1}{2y^2} + \ldots\right) \approx \dfrac{1}{\sqrt{\pi}y}$.

Таким образом, имеется полное асимптотическое совпадение точного (14) и приближенного (7) решений.

Далее решим задачу для квазистационарной (регулярной) стадии нагрева, когда Fo > 0,3. При реализации задачи с помощью подстановки, линеаризующей граничное условие (6), необходимо иметь формулы для модели термически тонкого тела (ТТТ).

Решение в модели ТТТ. При малых числах Био (Bi < 1) температуры на поверхности $\vartheta_п$, в центре $\vartheta_ц$ и среднемассовая $\vartheta_{ср}$ почти не различаются друг от друга и равны просто ϑ. Теперь вместо уравнения теплопроводности (3) необходимо решить следующее дифференциальное уравнение теплового баланса:

$$d\vartheta = -kQ(\mathrm{Fo})d\mathrm{Fo} \equiv -k\mathrm{Bi}(\mathrm{Fo})\vartheta^m(\mathrm{Fo})d\mathrm{Fo}. \tag{15}$$

Разделяя переменные и интегрируя уравнение (15) с учетом начального условия (4), получим

$$\tilde{\mathrm{Fo}} = U(\vartheta) - U(\vartheta_0),\ n \neq 0, \tag{16}$$

где $U(\vartheta) = \frac{\vartheta^{-n}}{n}$; $\tilde{\mathrm{Fo}} = k\int\limits_0^{\mathrm{Fo}} \mathrm{Bi}(\eta)d\eta$ – модифицированное число Фурье.

Уравнение (16) позволяет выразить искомую температуру в явном виде:

$$\vartheta(\mathrm{Fo}) = \left(\vartheta_0^{-n} + n\tilde{\mathrm{Fo}}\right)^{-1/n}. \tag{17}$$

Для того, чтобы найти решение при $n = 0$, надо вернуться к исходному уравнению (15), положить $m = 1$ и получить известное уравнение $\vartheta(\mathrm{Fo}) = \exp(-\tilde{\mathrm{Fo}})$ для термически тонкого тела при $\alpha = \mathrm{const}$.

Решение через подстановку. С целью линеаризации граничного условия (6) введем новую переменную $W(X, \mathrm{Fo})$, связанную с $\vartheta(X, \mathrm{Fo})$ соотношением

$$W(X,\mathrm{Fo}) = \exp\left[U(\vartheta(X,\mathrm{Fo}))\right]. \tag{18}$$

Тогда, исходная система уравнений (3) – (6) преобразуется к виду:

$$\frac{\partial W(X,\mathrm{Fo})}{\partial \mathrm{Fo}} = \frac{\partial^2 W(X,\mathrm{Fo})}{\partial X^2} + \frac{k-1}{X}\frac{\partial W(X,\mathrm{Fo})}{\partial X} + \psi(X,\mathrm{Fo}), \tag{19}$$

$$W(X,0) = \exp\left(\frac{\vartheta_0^i}{i}\right) \equiv W_0; \tag{20}$$

$$\frac{\partial W(0,\mathrm{Fo})}{\partial X} = 0; \tag{21}$$

$$\frac{\partial W(1,\mathrm{Fo})}{\partial X} = -\mathrm{Bi}W_n(\mathrm{Fo}); \tag{22}$$

здесь $i = -n$; $\psi(X,\mathrm{Fo}) = \frac{(1-i)\vartheta^{2-i} - 1}{iW(X,\mathrm{Fo})}\left[\frac{\partial W(X,\mathrm{Fo})}{\partial X}\right]^2$ – нелинейный комплекс, может рассматриваться как внутренний источник (сток) тепла, переменный по величине и знаку.

Далее задачу будем решать методом последовательных приближений. Первое приближение получим, полагая в уравнении (19) функцию $\psi_1(X, \mathrm{Fo}) = 0$. Тогда решение системы уравнений (19) – (22) запишется в форме [20]:

$$W(X,\mathrm{Fo}) = W_0\sum_{n-1}^{\infty} P_\text{п} U_\text{п}(X)e^{-\mu_n^2 \mathrm{Fo}}, \tag{23}$$

или в квазистационарной стадии с учетом одного члена ряда (23), после логарифмирования уравнения (18) и перехода к исходной температуре:

поверхности

$$\vartheta_\text{п}(\mathrm{Fo}) = \left[i\left(\frac{\vartheta_0^i}{i} + \ln P - \mu^2\mathrm{Fo}\right)\right]^{1/i}, \tag{24}$$

центра

$$\vartheta_\text{ц}(\mathrm{Fo}) = \left[i\left(\frac{\vartheta_0^i}{i} + \ln A - \mu^2\mathrm{Fo}\right)\right]^{1/i} \tag{25}$$

и среднемассовой

$$\vartheta_\text{ср}(\mathrm{Fo}) = \left[i\left(\frac{\vartheta_0^i}{i} + \ln B - \mu^2\mathrm{Fo}\right)\right]^{1/i}, \tag{26}$$

$P_\text{п} = \frac{2\mathrm{Bi}}{\mathrm{Bi}(\mathrm{Bi}+2-k)+\mu_\text{п}^2}$; $B_\text{п} = P_\text{п}\frac{k\mathrm{Bi}}{\mu_\text{п}^2}$; $A_\text{п} = P_\text{п}U_\text{п}(0)$ – тепловые амплитуды; $P = P_1$; $A = A_1$ и т.д.; μ_n – корни соответствующего характеристического уравнения, например, для пластины $\mathrm{ctg}\,\mu_\text{п} = \mu_\text{п}/\mathrm{Bi}$.

В работе [20] предложена общая для всех трех тел формула расчета первого корня:

$$\mu = \sqrt{\frac{D}{\gamma}}, \tag{28}$$

где $D = k\mathrm{Bi}/\tilde{m}$; $\tilde{m} = 1 + g\mathrm{Bi}$ – коэффициент термической массивности тела; $\gamma = \frac{1+\sqrt{1+4\rho}}{2}$; $\rho = \frac{D^2}{k(k+2)^2(k+4)}$; $g = \frac{1}{k+2}$; при малых числах Био $\gamma \approx (1 + \rho)$.

Полагая в уравнении (25) температуру центра равной заданной $\vartheta_\text{ц}(\mathrm{Fo}_1) = \vartheta_\text{ц.з} = \vartheta_0 - \varepsilon_\text{п} = 0{,}95$, где $\varepsilon_\text{п} = 5\ \%$ можно условно считать степенью начала прогрева центральных точек тела, получим время инерционного периода

$$\mathrm{Fo}_1 = \frac{\varepsilon_i + \ln A}{\mu^2}, \tag{29}$$

где $\varepsilon_i = \frac{\vartheta_0^i - \vartheta_\text{ц.з}^i}{i} \geq \varepsilon_\text{п}$.

Формула для расчета Fo_1 при $\alpha = \mathrm{const}$ имеет аналогичный вид:

$$\mathrm{Fo}_1 = \frac{1}{\mu_1^2}\ln\frac{A}{0{,}95}. \tag{30}$$

Приведем сравнение полученных результатов. Предварительно запишем формулы для расчета температуры поверхности и центра тела

$$\vartheta_\text{п.0}(\mathrm{Fo}) = P\exp\left(-\mu^2\mathrm{Fo}\right); \tag{31}$$

$$\vartheta_\text{ц.0}(\mathrm{Fo}) = A\exp\left(-\mu^2\mathrm{Fo}\right) \tag{32}$$

при постоянном коэффициенте теплоотдачи ($n = 0$).

Численный пример. Пусть пластина ($k = 1$) охлаждается от температуры $\vartheta_0 = 1$ при турбулентном режиме свободной конвекции ($n = 1/3$) с числом $\mathrm{Bi} = 2$. Тогда $m = n + 1/3 = 4/3$; $\tilde{m} = 1 + 2/3 = 5/3$; $D = 2/(5/3) = 6/5 - 1{,}2$; $\rho = D^2/45 = 1{,}2^2/45 = 4/125$; $\gamma = (1 + \rho) = 1 + 4/125 = 129/125$.

Первый корень по уравнению (28) будет равен $\mu = \sqrt{(6/5)/(129/125)} = 1{,}078$. Тепловые амплитуды составят $P = \dfrac{2 \cdot 2}{2(2+2-1)+1{,}08^2} = 0{,}558$; $A = \dfrac{P}{\cos\mu} = \dfrac{0{,}558}{\cos(1{,}08)} = 1{,}178$. Время инерционного периода по формуле (29) составит $\mathrm{Fo}_1 = \dfrac{0{,}0517 + \ln 1{,}178}{1{,}08^2} = 0{,}1847$. Расчет по уравнению (30) дает $\mathrm{Fo}_1 = \dfrac{1}{1{,}08^2} \ln\left(\dfrac{1{,}178}{0{,}95}\right) = 0{,}1855$. Результаты расчетов практически совпали и это позволяет сделать вывод о том, что начальная стадия процесса охлаждения происходит, как в случае с $\alpha = \mathrm{const}$.

Температура в центре при $\mathrm{Fo}_1 = 0{,}185$ по выражению (25) будет $\vartheta_ц(0{,}186) = [-(1/3)(-3 + \ln 1{,}178 - 1{,}08^2 \cdot 0{,}185)]^{-3} = 0{,}950$. Полученное число подтверждает правильность вывода формулы (29), т.е. что температура $\vartheta_ц(\mathrm{Fo}_1)$ должна равняться $\vartheta_{ц.з}$. Температура поверхности при Fo_1 по уравнению (24) составит $\vartheta_п(0{,}185) = [-(1/3)(3 + \ln 0{,}558 - 1{,}08^2 \cdot 0{,}185)]^{-3} = 0{,}493$, а по уравнению (31) – $\vartheta_{п.0}(0{,}185) = 0{,}558 \exp(-1{,}08^2 \cdot 0{,}185) = 0{,}450$.

Оценим погрешность расчета по формуле (7) при времени Fo_1 несмотря на то, что $\mathrm{Fo}_1 > 0{,}1$. Модифицированное время составит $N = py = 1{,}128 \cdot 2 \times \sqrt{0{,}185} = 0{,}97$. Нулевое приближение по выражению (9) будет $Z_0 = 1 - \dfrac{N}{1 + \dfrac{4N}{3}} = 0{,}576$. После третьей итерации по уравнению (8) имеем $Z_3 = 0{,}556 = \vartheta_п(\mathrm{Fo}_1)$ вместо 0,493.

Погрешность составит $\Pi = \dfrac{(0{,}493 - 0{,}556) \cdot 100}{0{,}493} = 12{,}7$ %. При малых числах Био ($\mathrm{Bi} < 2$) погрешность расчета температуры поверхности по уравнению (7) будет гораздо меньше.

Для сравнения разных моделей были рассчитаны температуры при $\mathrm{Fo} = 1$ и представлены в таблице.

Там же приведены расчеты по формулам (24) и (25) при малом показателе степени $n = 0{,}01$, и эти данные практически совпали с моделью $\alpha = \mathrm{const}$, что свидетельствует об адекватности указанных формул реальным процессам.

Из анализа таблицы вытекает, что, как и следовало ожидать, ввиду падающего по ходу процесса температурного напора ΔT, а следовательно и коэффициента теплоотдачи, температуры, рассчитанные по формулам (24) – (26), сильно завышены по сравнению с моделью $\alpha = \mathrm{const}$. Неучет зависимости α от температуры поверхности может привести к большим погрешностям.

При известном температурном поле (7), (23) – (26), следуя методике [10], можно записать осевые относительные термические напряжения в любой точке тела:

$$\tilde{\sigma}(X, \mathrm{Fo}) = \vartheta_{ср}(\mathrm{Fo}) - \vartheta(X, \mathrm{Fo}). \qquad (33)$$

На поверхности тела (при $X = 1$) имеем

$$\tilde{\sigma}_п(\mathrm{Fo}) = \vartheta_{ср}(\mathrm{Fo}) - \vartheta_п(\mathrm{Fo}), \qquad (34)$$

в центральных точках тела (при $X = 0$) запишем

$$\tilde{\sigma}_ц(\mathrm{Fo}) = \vartheta_{ср}(\mathrm{Fo}) - \vartheta_ц(\mathrm{Fo}), \qquad (35)$$

где $\sigma(x, \tau) = \tilde{\sigma}\sigma_0$; $\sigma_0 = \dfrac{\beta E \Delta T_0}{1 - \nu}$ – максимально возможные термические напряжения, Па; β – линейный коэффициент термического расширения, 1/К; E – модуль упругости, Па; ν – коэффициент Пуассона.

Выводы. Получено решение для модели термически тонкого тела. Разработана инженерная методика расчета температур и термических напряжений на начальной и квазистационарной стадиях нагрева (охлаждения) тел правильной геометрической формы при коэффициенте теплообмена, зависящем от температуры поверхности по степенному закону. Приведены формулы для расчета осевых термических напряжений

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Саломатов В.В., Гончаров Э.И. Температурное поле неограниченной пластины при переменных значениях коэффициента теплообмена и температуры внешней среды // ИФЖ. 1968. Т. 14, № 4. С. 743 – 745.
2. Иванов В.В., Саломатов В.В. К расчету температурного поля в твердых телах при переменном коэффициенте теплообмена // ИФЖ. 1965. Т. 9, № 1. С. 83 – 85.
3. Видин Ю.В. Исследование теплопроводности твердых тел при переменных граничных условиях // Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт. 1967. № 4. С. 132 – 134.

Сравнение температур $\vartheta_п$ и $\vartheta_ц$, рассчитанные при Bi = 2 по разным моделям при *n* = 1/3, *n* = 0,01 и *n* = 0

Comparison of temperatures $\vartheta_п$ and $\vartheta_ц$, calculated at Bi = 2 for different models at *n* = 1/3, *n* = 0.01 and *n* = 0

Число Fo	$\vartheta_п$(Fo) при			$\vartheta_ц$(Fo) при		
	$n = 1/3$ (по фор. (24))	$n = 0{,}01$ (по фор. (24))	$n = 0$ (по фор. (31))	$n = 1/3$ (по фор. (25))	$n = 0{,}01$ (по фор. (25))	$n = 0$ (по фор. (32))
0,185	0,493	–	0,450	0,950	–	0,949
1,000	0,253	0,175	0,178	0,423	0,371	0,370

4. Иванов В.В. Расчет нелинейной теплопроводности при переменном коэффициенте теплообмена // Изв. вуз. Авиационная техника. 1967. С. 89 – 92.
5. Приходько И.М. Температурное поле неограниченного цилиндра и шара при изменяющихся во времени коэффициенте теплоотдачи и температуре окружающей среды // Сб. трудов Строительная теплофизика. – М.: Энергия, 1966. С. 297 – 304.
6. Киселев К.А., Лазарев А.И. Температурное поле неограниченной пластины при переменном значении коэффициента теплоотдачи и переменной температуре внешней среды // Журнал технической физики. 1960. Т. XXX, № 6. С. 616 – 621.
7. Приходько И.М. Температурное поле пластины при изменяющихся во времени коэффициенте теплоотдачи и температуре окружающей среды // Изв. вуз. Авиационная техника. 1963. № 3. С. 21 – 27.
8. Vujanoric B., Dfukic Dj. On one Yariational principle of Hamilton's type for non linear heat transfer problem // Internat. J. Heat and Mass Transfer. 1972. Vol. 15. No. 5. P. 111.
9. Sitzler R. Ein Analogiemodell zur Behandlung instationarer Warmeleitungsp: lems, bei temperaturabhangigen Stoffeigenschaften // Prakt. Energiekunde. 1967. Bd. 15. No. 3. P. 37.
10. Gay B. Comparison of methods for solution of the heat conduction equations a radiation boundary condition // Internat. J. Heat and Mass Transfer. 1965. Vol. 8. No. 3. P. 507.
11. Goodman T.R. Application of integral methods to transient nonlinear heat transfer. Advances in Heat Transfer. Vol. 1. New York: Academic Press, 1964, pp. 51 – 122.
12. Dicker D., Asnani M. A perturbation solution for the nonlinear radiation heat transfer problem / Proc. 3-rd Internat. Heat Transfer Conf., Chicago. 1966. Vol. 5. P. 164.
13. Frost W., Eraslan A. An iterative method for determining the heat transfer from a fin with radiative interaction between the base and adjacent fin surfaces // AIAA Piper. 1968. No. 772. P. 10.
14. Mueller H.F., Malmuth N. D. Temperature distribution in radiating heat shieldsby the method of singular perturbations // Internat. J. Heat and Mass Transfer. 1965. Vol. 8. P. 915.
15. Na F.Y., Tang S.C. A method for the solution of conduction heat transfer with non-linear heat generation // Z. angew. Math, und Mech. 1969. Vol. 49. No. 1 P. 45.
16. Stops D.W., Pearson R.E. Analogous studies of simultaneous conductive and radiative heat transfer // Britn. J. Appl. Phys. 1966. Vol. 17. No. 11. P. 1491.
17. Crosbie A.L., Viskanta R. Transient heating or cooling of a plate by combined convection and radiations // Internat. J. Heat and Mass Transfer. 1968. Vol. 11. No. 2. P. 305.
18. Исаченко В.П., Осипова В.А., Сукомел А.С. Теплопередача. – М.: Энергия, 1975. – 448 с.
19. Горбунов А.Д. Аналитический расчет процесса радиационного нагрева (охлаждения) тел на начальной стадии // Математичне моделювання. 2012. № 2 (27). С. 90 – 94.
20. Горбунов А.Д. К аналитическому расчету термических напряжений при конвективном нагреве тел простой формы // Математическое моделирование. 2012. № 1 (26). С. 39 – 45.

Поступила 15 февраля 2016 г.

Izvestiya VUZov. Chernaya Metallurgiya = Izvestiya. Ferrous Metallurgy. 2017. Vol. 60. No. 2, pp. 164–169.

CALCULATION OF THE TEMPERATURE AND THERMAL STRESS AT HEAT TRANSFER COEFFICIENT DEPENDING ON THE TEMPERATURE OF BODY SURFACE

A.D. Gorbunov, S.V. Ukleina

Dneprodzerzhinsk State Technical University, Dneprodzerzhinsk, Ukraine

Abstract. The mathematical problem definition considering dependence of heat transfer coefficient on surface temperature in case of heating (chilling) of bodies of the correct geometrical form in the form of an unrestricted plate, cylinder or sphere, in case of free convection in unrestricted amount was for the first time written down, thereby making the task of heat conductivity nonlinear. The decision for model of thermally thin body was received. The calculation method for the surface temperatures at initial stage was developed. On the basis of the integrated linearizing transformations the engineering method of fields of temperatures and axial thermal tension in a quasistationary stage of heating (chilling) of bodies of the correct geometrical form was developed for the case of the heat exchange coefficient depending on surface temperature under the sedate law according to the mode of free convection: laminar, transitional or turbulent. Verification of decisions on model of fixed heat transfer coefficient have shown that the error of decisions is acceptable for engineering calculations, and not accounting of the dependence of heat transfer coefficient on temperature can result in big inaccuracies. Formulas for calculation of axial thermal tension are given for any point of the body: on a surface and in the center.

Keywords: heating, cooling, bodies of an initial form, initial and quasistationary stages, heat transfer coefficient, surface temperature, temperature fields, thermal tension, engineering calculation.

DOI: 10.17073/0368-0797-2017-2-164-169

REFERENCES

1. Salomatov V.V., Goncharov E.I. Temperature field of an unlimited plate in case of variable values of heat transfer coefficient and temperature of external environment. *IFZh*. 1968, vol. 14, no. 4, pp. 743–745. (In Russ.).
2. Ivanov V.V., Salomatov V.V. On the calculation of the temperature field in solids with variable heat-transfer coefficients. *Journal of Engineering Physics*. 1967, vol. 9, no. 1, pp. 63–65.
3. Vidin Yu.V. Research of heat conduction of solid bodies in case of variable boundary conditions. *Izv. AN SSSR. Energetika i transport*. 1967, no. 4, pp. 132–134. (In Russ.).
4. Ivanov V.V. Calculation of non-linear heat conduction in case of float heat transfer coefficient. *Izv. vuz. Aviatsionnaya tekhnika*. 1967, no 2, pp. 89–92. (In Russ.).
5. Prikhod'ko I.M. Temperature field of the unlimited cylinder and sphere at changing in time heat transfer coefficient and ambient temperature. In: *Sb. trudov Stroitel'naya teplofizika* [Building thermal physics. Coll. of papers]. Moscow: Energiya, 1966, pp. 297–304. (In Russ.).
6. Kiselev K.A., Lazarev A.I. Temperature field of an unlimited plate in case of variable value of heat transfer coefficient and temperature of an external environment. *Zhurnal tekhnicheskoi fiziki*. 1960, vol. XXX, no. 6, pp. 616–621. (In Russ.).
7. Prikhod'ko I.M. Temperature field of a plate at changing in time heat transfer coefficients and ambient temperature. *Izv. vuz. Aviatsionnaya tekhnika*. 1963, no 3, pp. 21–27. (In Russ.).
8. Vujanoric B., Dfukic Dj. On one Yariational principle of Hamilton's type for nonlinear heat transfer problem. *Internat. J. Heat and Mass Transfer*. 1972, vol. 15, no. 5, p. 111.
9. Sitzler R. Ein Analogiemodell zur Behandlung instationarer Warmeleitungsp: lems, bei temperaturabhangigen Stoffeigenschaften. *Prakt. Energiekunde*. 1967, Bd. 15, no. 3, p. 37. (In Germ.)
10. Gay B. Comparison of methods for solution of the heat conduction equations a radiation boundary condition. Internat. *J. Heat and Mass Transfer*. 1965, vol. 8, no. 3, p. 507.

11. Goodman T.R. Application of integral methods to transient nonlinear heat transfer. In: *Advances in Heat Transfer*. vol. 1. New York: Academic Press, 1964, pp. 51–122.
12. Dicker D., Asnani M. A perturbation solution for the nonlinear radiation heat transfer problem. *Proc. 3-rd Internat. Heat Transfer Conf., Chicago*. 1966, vol. 5, p. 164.
13. Frost W., Eraslan A. An iterative method for determining the heat transfer from a fin with radiative interaction between the base and adjacent fin surfaces. *AIAA Piper*. 1968, no. 772, p. 10.
14. Mueller H.F., Malmuth N. D. Temperature distribution in radiating heat shieldsby the method of singular perturbations. *Internat. J. Heat and Mass Transfer*. 1965, vol. 8, p. 915.
15. Na F.Y., Tang S.C. A method for the solution of conduction heat transfer with non-linear heat generation. *Z. angew. Math, und Mech*. 1969, vol. 49, no. 1, p. 45.
16. Stops D.W., Pearson R.E. Analogous studies of simultaneous conductive and radiative heat transfer. *Britn. J. Appl. Phys*. 1966, vol. 17, no. 11, p. 1491.
17. Crosbie A.L., Viskanta R. Transient heating or cooling of a plate by combined convection and radiations. *Internat. J. Heat and Mass Transfer*. 1968, vol. 11, no. 2, p. 305.
18. Isachenko V.P., Osipova V.A., Sukomel A.S. *Teploperedacha* [Heat transfer]. Moscow: Energiya, 1975, 448 p. (In Russ.).
19. Gorbunov A.D. Analytical calculation of process of radiation heating (cooling) of bodies at an initial stage. *Matematichne modelyuvannya*. 2012, no. 2 (27), pp. 90–94. (In Russ.).
20. Gorbunov A.D. Analytical calculation of thermal tension at convective heating of bodies of a simple form. *Matematicheskoe modelirovanie*. 2012, no. 1 (26), pp. 39–45. (In Russ.).

Information about the authors:

A.D. Gorbunov, *Dr. Sci. (Eng.), Professor, Head of the Chair of Thermal Power* (gorbunov@tpte.ru)
S.V. Ukleina, *Postgraduate of the Chair of Thermal Power* (84sveta28@mail.ru)

Received February 15, 2016