

УДК 536.2.01

## ИДЕНТИФИКАЦИЯ ИСТОЧНИКА ТЕПЛОТЫ НА ОСНОВЕ АНАЛИТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ\*

*Еремин А.В., к.т.н., доцент кафедры «Теоретические основы теплотехники  
и гидромеханика» (a.v.eremin@list.ru)*

*Стефанюк Е.В., д.т.н., профессор кафедры «Теоретические основы теплотехники  
и гидромеханика» (totig@yandex.ru)*

*Абишева Л.С., ассистент кафедры «Теоретические основы теплотехники и гидромеханика»*

Самарский государственный технический университет  
(443100, Россия, Самара, ул. Молодогвардейская, 244)

**Аннотация.** На основе определения фронта температурного возмущения и дополнительных граничных условий получено приближенное аналитическое решение задачи теплопроводности для бесконечной пластины при граничных условиях третьего рода с переменным во времени источником теплоты. Процесс теплопроводности разделяется на две стадии по времени, что позволяет находить простые по форме аналитические решения для каждой из них в отдельности. Получаемые решения представляются в форме алгебраических степенных рядов с зависящими от времени коэффициентами, определяемыми из основных и дополнительных граничных условий. Дополнительные граничные условия находятся в таком виде, чтобы их выполнение искомым решением было эквивалентно выполнению дифференциального уравнения краевой задачи во всем диапазоне изменения временной и пространственной переменных. Эти условия задаются в граничных точках и на фронте температурного возмущения. Таким путем можно получать аналитические решения во всем диапазоне времени нестационарного процесса, включая малые и сверхмалые его значения, практически с заданной степенью точности. Полученное в настоящей работе аналитическое решение было использовано для идентификации переменного во времени источника теплоты путем решения обратной задачи теплопроводности.

**Ключевые слова:** задача теплопроводности, бесконечная пластина, переменный во времени источник теплоты, интегральный метод, фронт температурного возмущения, дополнительные граничные условия, идентификация источника теплоты.

DOI: 10.17073/0368-0797-2016-5-339-346

Во многих случаях теплообмен в твердых телах может происходить при наличии внутренних источников теплоты, которые могут возникать за счет протекания тока в проводнике, нахождения тела в электромагнитном поле, воздействия ультразвуковых высокочастотных колебаний, полиморфных превращений в металлах при изменении температуры и др. [1 – 3]. Важной проблемой является разработка методов получения простых по форме аналитических (приближенных аналитических) решений таких задач с целью их использования для идентификации (восстановления) источников теплоты, физических свойств среды, краевых условий и прочее путем решения обратных задач теплопроводности. Известные точные аналитические решения указанных задач выражаются сложными бесконечными функциональными рядами, плохо сходящимися в окрестности малых и особенно сверхмалых значений временной и пространственной координат, что приводит к практической невозможности их использования для решения обратных задач теплопроводности [4 – 10].

\* Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках базовой части государственного задания ФГБОУ ВО «СамГТУ» (код проекта: 1273).

Рассмотрим задачу теплопроводности для бесконечной пластины при симметричных граничных условиях третьего рода с переменным во времени источником теплоты в следующей математической постановке:

$$\frac{\partial T(x, \tau)}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 T(x, \tau)}{\partial x^2} + \frac{\omega(\tau)}{c\rho}; \quad (\tau > 0; 0 < x < \delta); \quad (1)$$

$$T(x, 0) = T_0; \quad (2)$$

$$\frac{\partial T(\delta, \tau)}{\partial x} = 0; \quad (3)$$

$$\frac{\lambda \partial T(0, \tau)}{\partial x} - \alpha [T(0, \tau) - T_{cp}] = 0, \quad (4)$$

где  $T$  – температура;  $x$  – координата;  $\tau$  – время;  $a$ ,  $\lambda$ ,  $\alpha$  – коэффициенты температуропроводности, теплопроводности, теплоотдачи соответственно;  $\omega(\tau) = \omega_0(1 + \beta\tau)$  – мощность внутреннего источника теплоты;  $\beta = \text{const}$ ;  $c$  – теплоемкость;  $\rho$  – плотность;  $T_0$  – начальная температура;  $T_{cp}$  – температура среды;  $\delta$  – половина толщины пластины.

Трудности получения и использования известных точных аналитических решений задачи (1) – (4) заключаются в том, что собственные числа краевой задачи определяются из трансцендентных уравнений, решение которых может быть получено лишь численными (или графическими) методами. Собственные числа не могут быть представлены в виде некоторой формулы в зависимости от числа приближений, что снижает ценность известных решений как аналитических. Например, решение обратных задач теплопроводности в данном случае практически не представляется возможным.

Для получения более простого аналитического решения задачи (1) – (4) воспользуемся методом, основанном на определении фронта температурного возмущения и дополнительных граничных условий [11 – 15].

Введем следующие безразмерные переменные и параметры:

$$\Theta = \frac{T - T_0}{T_{cp} - T_0}; \quad Bi = \frac{\alpha \delta}{\lambda}; \quad Fo = \frac{a\tau}{\delta^2}; \quad \xi = \frac{x}{\delta};$$

$$Po = \frac{\beta \delta^2 Po_1}{a}; \quad Po_1 = \frac{\omega_0 \delta^2}{ac\rho(T_{cp} - T_0)}.$$

Используя понятие фронта температурного возмущения, разделим процесс теплообмена на две стадии по времени:  $0 \leq Fo \leq Fo_1$  и  $Fo_1 \leq Fo < \infty$ , где  $Fo_1$  – время достижения фронтом температурного возмущения координаты  $\xi = 1$ . Для этого введем движущуюся во времени границу (фронт температурного возмущения  $q_1(Fo)$ ), разделяющую исходную область  $0 \leq \xi \leq 1$  на две подобласти: возмущенную  $0 \leq \xi \leq q_1(Fo)$  и невозмущенную  $q_1(Fo) \leq \xi \leq 1$ , где  $q_1(Fo)$  – функция, определяющая продвижение границы раздела по координате  $\xi$  во времени. Первая стадия заканчивается при достижении подвижной границей координаты  $\xi = 1$  т. е. когда  $Fo = Fo_1$  (рис. 1).

Во второй стадии процесса изменение температуры происходит по всему объему тела  $0 \leq \xi \leq 1$ . Понятие фронта температурного возмущения в данном случае теряет смысл и в рассмотрение вводится дополнительная искомая функция  $q_2(Fo) = \Theta(1, Fo)$ , характеризующая изменение температуры во времени в точке  $\xi = 1$  (см. рис. 1).

Поскольку в параболическом уравнении теплопроводности (1) заложена бесконечная скорость распространения теплоты, то понятие фронта температурного возмущения в данном случае следует считать условным и используемым лишь как средство для получения простых по форме аналитических решений. Ниже будет показано, что с увеличением числа приближений  $n$  наряду с увеличением точности получаемого решения время  $Fo_1$  перемещения фронта теплового возмущения от поверхности до центра пластины уменьшается и в пределе при  $n \rightarrow \infty$   $Fo \rightarrow 0$ . Следовательно, описывае-

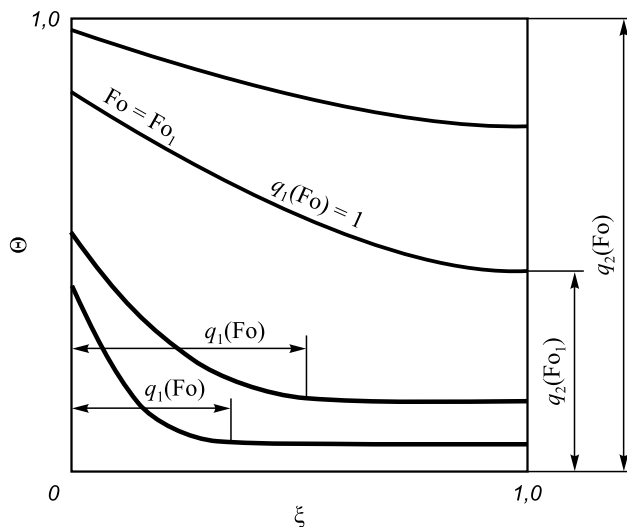


Рис. 1. Расчетная схема теплообмена

Fig. 1. Heat exchange scheme

мый получаемым решением процесс теплопроводности будет приближаться к процессу, протекающему с бесконечной скоростью распространения теплоты.

Математическая постановка задачи для первой стадии процесса имеет вид

$$\frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi^2} + PoFo + Po_1; \quad 0 \leq \xi < q_1(Fo); \quad (5)$$

$$\frac{\partial \Theta(0, Fo)}{\partial \xi} - Bi[\Theta(0, Fo) - 1] = 0; \quad (6)$$

$$\Theta(q_1, Fo) = Q(Fo); \quad (7)$$

$$\frac{\partial \Theta(q_1, Fo)}{\partial \xi} = 0. \quad (8)$$

Согласно уравнению (7) температура на фронте температурного возмущения определяется лишь действием источника теплоты, где  $Q(Fo)$  находится по уравнению

$$Q(Fo) = \int_0^{Fo} (PoFo + Po_1) dFo = 0,5PoFo^2 + Po_1Fo.$$

Отметим, что задача (5) – (8) не содержит начального условия для искомой функции  $\Theta(\xi, Fo)$ . Это связано с тем, что при  $Fo = 0$  задача (5) – (8) определена лишь в точке  $\xi = 0$ , где задается начальное условие  $q_1(Fo) = 0$ .

Решение задачи (5) – (8) принимается в виде

$$\Theta(\xi, Fo) = \sum_{k=0}^n a_k (q_1(Fo)) \xi^k, \quad (9)$$

где  $a_k(q_1(Fo))$  – неизвестные коэффициенты, определяемые из граничных условий (6) – (8). Подставляя (9), ог-

раничиваясь тремя членами ряда, относительно  $a_k(q_1)$  ( $k = 0, 1, 2$ ) будем иметь систему трех алгебраических линейных уравнений. После определения  $a_k(q_1)$  уравнение (9) принимает вид

$$\Theta(\xi, Fo) = \left[ Bi\xi(PoFo^2 + 2Po_1Fo - 2)(2q_1 - \xi) + 2q_1(2Po_1Fo + Biq_1 + Fo^2Po) \right] / [2q_1(Biq_1 + 2)]. \quad (10)$$

Рассмотрим случай, когда мощность внутреннего источника теплоты не зависит от времени ( $Po = 0$ ), а  $Bi \rightarrow \infty$  (граничное условие первого рода). Соотношение (10) при этом будет

$$\Theta(\xi, Fo) = \frac{\xi^2 - 2\xi q_1 + q_1^2 - FoPo_1\xi^2 + 2FoPo_1\xi q_1}{q_1^2}. \quad (11)$$

Для нахождения неизвестной функции  $q_1(Fo)$  составим невязку уравнения (5) и проинтегрируем ее в пределах толщины термического слоя  $0 \leq \xi \leq q_1(Fo)$ , т. е. составим интеграл теплового баланса, что эквивалентно осреднению уравнения (5)

$$\int_0^{q_1} \frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial Fo} d\xi = \int_0^{q_1} \left( \frac{\partial^2 \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi^2} + PoFo + Po_1 \right) d\xi. \quad (12)$$

Подставляя (11) в (12), получаем

$$q_1' + \frac{6FoPo_1 - Po_1q_1^2 - 6}{q_1(FoPo_1 - 1)} = 0. \quad (13)$$

Решение уравнения (13) при начальном условии  $q_1(0) = 0$  имеет вид

$$q_1(Fo) = - \frac{2\sqrt{Po_1(-3Fo^2Po_1^2 + 3FoPo_1 - 1 + Fo^3Po_1^3)}}{Po_1(FoPo_1 - 1)}. \quad (14)$$

Соотношения (11), (14) представляют решение задачи (5) – (8) в первом приближении первой стадии процесса. Результаты расчетов температуры по формуле (11) при  $Po_1 = 50$  в сравнении с точным решением [4] представлены на рис. 2. Их анализ позволяет заключить, что отличие температур, полученных по формуле (11), в диапазоне  $10^{-7} \leq Fo \leq 0,015$  находится в пределах 1 – 8 %. При дальнейшем увеличении времени расхождение решений увеличивается и при  $Fo = 0,03$  составляет около 20 %. Отметим, что соотношение (11) точно удовлетворяет интегралу теплового баланса (12) и граничным условиям (6) – (8). Уравнение (5), как это следует из (12), в данном случае удовлетворяется лишь в среднем. Следовательно, повышение точности решения связано с улучшением выполнения уравнения (5), а для этого необходимо увеличивать число членов ряда (9), что приводит к увеличению количества неизвестных коэффициен-

тов  $a_k(q_1)$ . Для их определения совместно с основными используются дополнительные граничные условия [14, 15], которые во втором приближении первой стадии процесса записываются в виде

$$\frac{\partial^3 \Theta(0, Fo)}{\partial \xi^3} - Bi \left( \frac{\partial^2 \Theta(0, Fo)}{\partial \xi^2} + PoFo + Po_1 \right) = 0; \quad (15)$$

$$\frac{\partial^2 \Theta(q_1, Fo)}{\partial \xi^2} = 0; \quad (16)$$

$$\frac{\partial^3 \Theta(q_1, Fo)}{\partial \xi^3} = 0. \quad (17)$$

Для определения соотношений (15) – (17) используются дифференциальное уравнение (5) и граничные условия (6) – (8). Физический смысл дополнительных граничных условий состоит в том, что их выполнение искомым решением эквивалентно выполнению исходного дифференциального уравнения в граничных точках и на фронте температурного возмущения. Поскольку область определения фронта температурного возмущения представляет весь диапазон изменения пространственной переменной  $0 \leq \xi \leq 1$ , то, следовательно, чем большее число дополнительных граничных условий будет принято, тем лучше будет выполняться уравнение (5) внутри рассматриваемой области во всем диапазоне времени первой стадии процесса  $0 \leq Fo \leq Fo_1$ . Отметим, что дополнительные граничные условия не изменяют математическую постановку задачи (5) – (8). Они служат лишь вспомогательным средст-

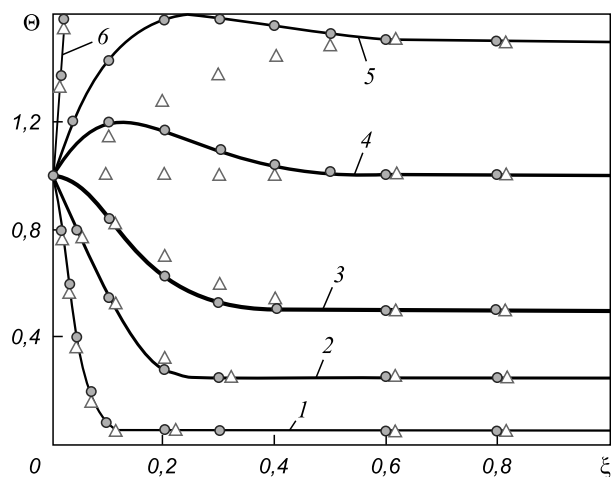


Рис. 2. Распределение безразмерной температуры в пластине с внутренними источниками теплоты (первая стадия процесса)

( $Bi \rightarrow \infty, Po = 0, Po_1 = 50$ ) при  $Fo$ :  
1 – 0,001; 2 – 0,005; 3 – 0,01; 4 – 0,02; 5 – 0,03; 6 – 0,25; — — точное решение;  $\Delta$  – первое приближение;  $\bigcirc$  – второе приближение

Fig. 2. Distribution of the dimensionless temperature in a plate with inner heat sources (first stage of the process) ( $Bi \rightarrow \infty, Po = 0, Po_1 = 50$ ) at  $Fo$ :  
1 – 0,001; 2 – 0,005; 3 – 0,01; 4 – 0,02; 5 – 0,03; 6 – 0,25; — — exact solution;  $\Delta$  – first approximation;  $\bigcirc$  – second approximation

вом для того, чтобы искомое решение вида (9) как можно лучше удовлетворяло уравнению (5).

Подставляя (9), ограничиваясь шестью членами ряда, в основные (6) – (8) и дополнительные (15) – (17) граничные условия, относительно  $a_k(q_1)$  получим цепочную систему алгебраических линейных уравнений. После определения из решения этой системы  $a_k(q_1)$  соотношение (9) принимает вид (при  $Po = 0; Bi \rightarrow \infty$ )

$$\begin{aligned} \Theta(\xi, Fo) = & 1 + \left[ 20(Po_1 Fo - 1) + Po_1 q_1^2 \right] \frac{\xi}{8q_1} - \\ & - 0,5Po_1 \xi^2 - \left[ 20(Po_1 Fo - 1) - 3Po_1 q_1^2 \right] \frac{\xi^3}{4q_1^3} + \\ & + \left[ 40(Po_1 Fo - 1) - 4Po_1 q_1^2 \right] \frac{\xi^4}{8q_1^4} + \\ & + \left[ 12(1 - Po_1 Fo) + Po_1 q_1^2 \right] \frac{\xi^5}{8q_1^5}. \end{aligned} \quad (18)$$

Подставляя (18) в интеграл теплового баланса (12) относительно неизвестной функции  $q_1(Fo)$  получаем следующее обыкновенное дифференциальное уравнение

$$q_1 q_1' - 10 = 0.$$

Его решение при начальном условии  $q_1(0) = 0$  имеет вид

$$q_1(Fo) = \sqrt{20 Fo}. \quad (19)$$

Соотношения (18), (19) представляют решение задачи (5) – (8) во втором приближении. Это решение точно удовлетворяет интегралу теплового баланса (12), основным (6) – (8) и дополнительным (15) – (17) граничным условиям. Отметим, что использование дополнительных граничных условий позволило значительно повысить точность решения, а, следовательно, и точность выполнения уравнения (5) по сравнению с первым приближением (см. рис. 2).

Положив в (19)  $q_1(Fo) = 1$ , находим время окончания первой стадии процесса  $Fo_1 = 0,05$ . Анализ уравнения (19) позволяет заключить, что внутренний источник теплоты не влияет на скорость перемещения фронта температурного возмущения. Графики перемещения фронта температурного возмущения в зависимости от числа приближений даны на рис. 3. Из их анализа следует, что с увеличением числа приближений время достижения фронтом температурного возмущения координаты  $\xi = 1$  уменьшается, а точность решения задачи возрастает и в пределе при  $n \rightarrow \infty Fo_1 \rightarrow 0$ , что свидетельствует о приближении решения к описанию бесконечной скорости распространения теплоты.

Для получения решения задачи (5) – (8) в третьем приближении к основным (6) – (8) и дополнительным (15) – (17) следует добавить еще следующие дополнительные граничные условия

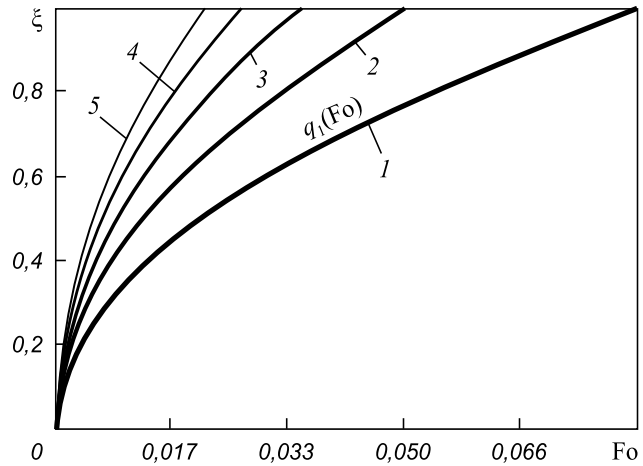


Рис. 3. Перемещение фронта температурного возмущения по координате  $\xi$  во времени  $Fo$ : 1 – 5 – номер приближения

Fig. 3. Motion of the temperature perturbation front along the coordinate  $\xi$  at time  $Fo$ : 1 – 5 – approximation number

$$\begin{aligned} \frac{\partial^5 \Theta(0, Fo)}{\partial \xi^5} - Bi \left( \frac{\partial^4 \Theta(0, Fo)}{\partial \xi^4} + Po \right) &= 0; \\ \frac{\partial^4 \Theta(q_1, Fo)}{\partial \xi^4} = 0; \quad \frac{\partial^5 \Theta(0, Fo)}{\partial \xi^5} &= 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Число членов ряда (9) в третьем приближении будет равно 9, где неизвестные коэффициенты  $a_k(q_1)$  ( $k = 0, 1, 2, \dots, 9$ ) находятся из основных (6) – (8) и дополнительных (15) – (17), (20) граничных условий. Дальнейший процесс получения решения такой же, как и во втором приближении.

Математическая постановка задачи для второй стадии процесса имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi^2} + Po Fo + Po_1; \\ (Fo \geq Fo_1; 0 \leq \xi \leq 1); \end{aligned} \quad (21)$$

$$\frac{\partial \Theta(0, Fo)}{\partial \xi} - Bi[\Theta(0, Fo) - 1] = 0; \quad (22)$$

$$\Theta(1, Fo) = q_2(Fo); \quad (23)$$

$$\frac{\partial \Theta(1, Fo)}{\partial \xi} = 0. \quad (24)$$

Начальным условием задачи (21) – (24) будет распределение температуры в конце первой стадии процесса, т. е. соотношение (10) при  $q_1(Fo) = q_1(Fo_1) = 1$ .

Решение задачи (21) – (24) принимается в виде

$$\Theta(\xi, Fo) = \sum_{k=0}^n b_k(q_2(Fo)) \xi^k, \quad (25)$$

где  $b_k(q_2(Fo))$  – коэффициенты, определяемые из граничных условий (22) – (24). После их определения соотношение (25) принимает вид

$$\Theta(\xi, Fo) = \frac{Bi + 2q_2 + Bi\xi^2 - 2Bi\xi + 2Bi\xi q_2 - Bi\xi^2 q_2}{Bi + 2}. \quad (26)$$

Осредняя уравнение (5) по всей ширине пластины, находим

$$\int_0^1 \frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial Fo} d\xi = \int_0^1 \left( \frac{\partial^2 \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi^2} + PoFo + Po_1 \right) d\xi. \quad (27)$$

Подставляя (26) в (27), относительно  $q_2(Fo)$  получаем обыкновенное дифференциальное уравнение вида ( $Bi \rightarrow \infty, Po = 0$ )

$$2q_2' + 6q_2 - 3Po_1 - 6 = 0, \quad (28)$$

где  $q_2' = \frac{dq_2}{dFo}$ .

Его решение при начальном условии  $q_2(Fo_1) = \Theta(1, Fo_1)$  будет

$$q_2(Fo) = 1 + 0,5Po_1 - (-Po_1Fo_1 + 1 + 0,5Po_1)e^{-3(Fo-Fo_1)}, \quad (29)$$

где  $\Theta(1, Fo_1)$  – распределение температуры в пластине при  $Fo = Fo_1$ , определяемое из (11);  $Fo_1$  – время окончания первой стадии, определяемое из (14), положив  $q_1(Fo_1) = 1$ .

Соотношение (26) совместно с (29) представляют решение задачи (21) – (24) в первом приближении второй стадии процесса. Анализ результатов расчетов по формуле (26) позволяет заключить, что их отличие от точного решения [4] не превышает 9%. Для повышения точности следует увеличивать число членов ряда (25), для определения неизвестных коэффициентов которого необходимо использовать дополнительные граничные условия, первое из которых совпадает с соотношением (15), а второе и третье определяются с использованием дифференциального уравнения (21) и граничных условий (23), (24). Дифференцируя (23) по  $Fo$  и сопоставляя полученное соотношение с (21), находим второе дополнительное граничное условие

$$\frac{\partial^2 \Theta(1, Fo)}{\partial \xi^2} = \frac{dq_2(Fo)}{dFo} - PoFo - Po_1. \quad (30)$$

Дифференцируя (24) по переменной  $Fo$ , а уравнение (21) – по переменной  $\xi$ , после сопоставления полученных соотношений находим третье дополнительное граничное условие

$$\frac{\partial^3 \Theta(1, Fo)}{\partial \xi^3} = 0. \quad (31)$$

Физический смысл дополнительных граничных условий (15), (30), (31) в том, что их выполнение искомым решением эквивалентно выполнению уравнения (21) в граничных точках  $\xi = 0$  и  $\xi = 1$ . Расчеты показывают, что с увеличением числа дополнительных граничных условий, выполняемых в точках  $\xi = 0$  и  $\xi = 1$ , выполнение искомым решением (25) уравнения (21) существенно улучшается.

Подставляя (25), ограничиваясь шестью членами ряда, в основные (22) – (24) и дополнительные (15), (30), (31) граничные условия, относительно неизвестных коэффициентов  $b_k(q_2)$  ( $k = 0, 1, 2, \dots, 5$ ) будем иметь цепочную систему алгебраических линейных уравнений. Соотношение (25) после определения  $b_k(q_2)$  во втором приближении принимает вид

$$\begin{aligned} \Theta(\xi, Fo) = & 1 + \left( -\frac{5}{2} + \frac{3}{8} \frac{dq_2}{dFo} - \frac{1}{4} Po_1 + \frac{5}{2} q_2 \right) \xi - \\ & - \frac{1}{2} Po_1 \xi^2 + \left( 5 + \frac{5}{2} Po_1 - 5q_2 - \frac{7}{4} \frac{dq_2}{dFo} \right) \xi^3 + \\ & + \left( -5 - \frac{5}{2} Po_1 + 5q_2 + 2 \frac{dq_2}{dFo} \right) \xi^4 + \\ & + \left( \frac{3}{2} + \frac{3}{4} Po_1 - \frac{3}{2} q_2 - \frac{5}{8} \frac{dq_2}{dFo} \right) \xi^5. \quad (32) \end{aligned}$$

Подставляя (32) в интеграл теплового баланса (27), относительно  $q_2(Fo)$  получаем следующее обыкновенное дифференциальное уравнение

$$11q_2'' + 270q_2' + 600q_2 - 300Po_1 - 600 = 0, \quad (33)$$

где  $q_2'' = \frac{d^2 q_2}{dFo^2}$ .

Интегрируя уравнение (33), при начальном условии  $q_2(Fo_1) = \Theta(1, Fo_1)$  находим

$$q_2(Fo) = A_1 e^{-2,4711(Fo-Fo_1)} + A_2 e^{-22,075(Fo-Fo_1)} + 0,5Po_1 + 1, \quad (34)$$

где  $A_1 = -0,512Po_1 + 1,126Po_1Fo - 1,1267$ ;  $A_2 = 0,012Po_1 - 0,126Po_1Fo + 0,126$ .

Отметим, что в качестве начального условия функции  $q_2(Fo_1)$  использована формула (18) при  $Fo = Fo_1$ .

Результаты расчетов безразмерной температуры в первом и втором приближениях второй стадии процесса (при  $Bi \rightarrow \infty, Po = 0, Po_1 = 50$ ) представлены на рис. 4. Их анализ позволяет заключить, что использование дополнительных граничных условий дает возможность существенно увеличить точность получаемых решений. Отметим, что при  $Fo \geq 2$ , распределение температуры в пластине не зависит от времени, т. е. процесс теплообмена становится стационарным.

Преимущество полученных выше приближенных аналитических решений состоит в том, что при использовании экспериментальных данных об измене-

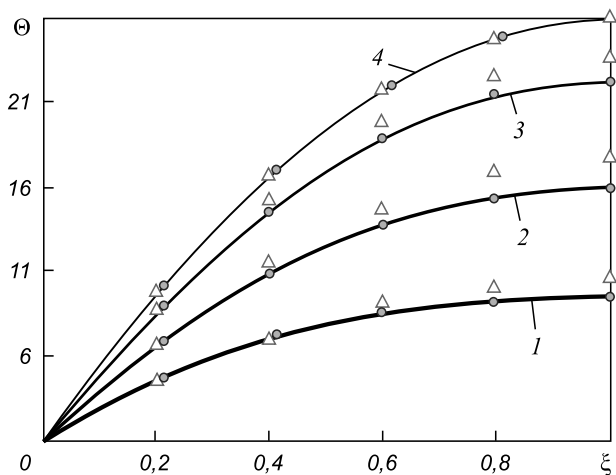


Рис. 4. Распределение безразмерной температуры в пластине с внутренними источниками теплоты (вторая стадия процесса) ( $Bi \rightarrow \infty, Po = 0, Po_1 = 50$ ) при  $Fo$ :  
 1 – 0,2; 2 – 0,4; 3 – 0,8; 4 – 2,0; 5,0; ———— точное решение;  $\Delta$  – первое приближение;  $\circ$  – второе приближение

Fig. 4. Distribution of the dimensionless temperature in a plate with inner heat sources (second stage of the process) ( $Bi \rightarrow \infty, Po = 0, Po_1 = 50$ ) at  $Fo$ :  
 1 – 0,2; 2 – 0,4; 3 – 0,8; 4 – 2,0; 5,0; ———— exact solution;  $\Delta$  – first approximation;  $\circ$  – second approximation

нии температуры в какой-либо точке пространственной координаты во времени может быть идентифицирован внутренний источник теплоты  $Po_1$ . В качестве примера рассмотрим задачу по определению мощности постоянного внутреннего источника теплоты ( $Po = 0$ ) при заранее известных условиях теплообмена поверхности пластины с окружающей средой, например, при  $Bi = 10$ .

Допустим, в ходе эксперимента измеряется температура на поверхности пластины в точке  $\xi = 0$  в некотором диапазоне  $0,02 \leq Fo \leq 0,05$ . В качестве экспериментальных данных будем использовать значения температуры при  $Po = 15$ , полученные на основе точного решения задачи (1) – (4) [4] (рис. 5):

$Fo$	0,02	0,03	0,04	0,05
$\Theta(Fo)$	0,82397	0,91943	0,99183	1,0513

Аппроксимируя экспериментальные данные полиномом третьей степени, найдем функцию  $\Theta(Fo)$ , описывающую распределение температуры в точке  $\xi = 0$ :

$$\Theta(Fo) = 11\,668Fo^3 - 267,2Fo^2 + 19,7Fo + 0,5233. \quad (35)$$

Решение задачи (1) – (4), полученное на основе определения фронта температурного возмущения (во втором приближении первой стадии процесса) при  $Bi = 10, \xi = 0$ , записывается в виде

$$\Theta(Fo) = \frac{2000Fo + 42FoPo_1 + 280\sqrt{5}Fo^{1,5}Po_1 - 27}{5600Fo + 392\sqrt{5}Fo + 42} + \frac{9}{14}. \quad (36)$$

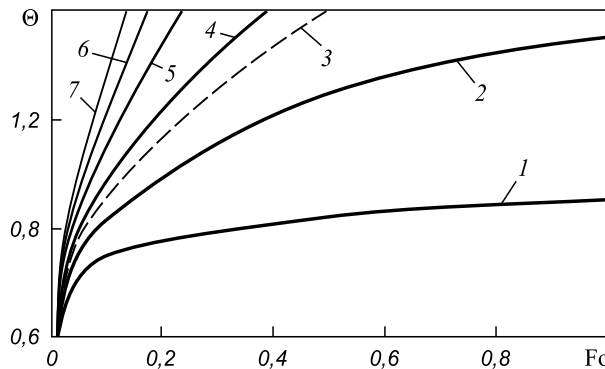


Рис. 5. Изменение безразмерной температуры в точке  $\xi = 0$  при  $Po$ :  
 1 – 0; 2 – 5; 3 – 8; 4 – 10; 5 – 15; 6 – 20; 7 – 25; ———— приближенное аналитическое решение; - - - - экспериментальные данные ( $\Theta(Fo)$ )

Fig. 5. Distribution of the dimensionless temperature in point  $\xi = 0$  at  $Po$ :  
 1 – 0; 2 – 5; 3 – 8; 4 – 10; 5 – 15; 6 – 20; 7 – 25; ———— approximate analytical solution; - - - - experimental data ( $\Theta(Fo)$ )

Приравнявая (35), (36) и определяя интеграл от полученного соотношения в пределах  $0,02 \leq Fo \leq 0,05$ , получаем

$$\int_{0,02}^{0,05} (11\,668Fo^3 - 267,2Fo^2 + 19,7Fo + 0,5233)dFo = \int_{0,02}^{0,05} \left( \frac{2000Fo + 42FoPo_1 + 280\sqrt{5}Fo^{1,5}Po_1 - 27}{5600Fo + 392\sqrt{5}Fo + 42} + \frac{9}{14} \right) dFo. \quad (37)$$

Вычисляя интегралы в (37), будем иметь алгебраическое уравнение

$$0,02853 = 0,00041198Po_1, \quad (38)$$

из решения которого  $Po_1 = 14,961$ . Точное значение числа Померанцева  $Po_1 = 15$ . Следовательно, отклонение найденного из уравнения (38) числа  $Po_1$  от его точного значения составляет менее 0,5 %.

**Выводы.** Применяя дополнительные граничные условия в интегральном методе теплового баланса, получено приближенное аналитическое решение нестационарной задачи теплопроводности для бесконечной пластины при симметричных граничных условиях третьего рода с переменным во времени источником теплоты. Разделение процесса теплопроводности на две стадии по времени позволило для каждой из них получить приближенное аналитическое решение простого вида с достаточной для инженерных приложений точностью.

Используя полученные решения, а также результаты точного аналитического решения этой же задачи, путем решения обратной задачи теплопроводности

идентифицирован переменный во времени источник теплоты. Результаты точного аналитического решения могут быть заменены экспериментальными данными. Полученные приближенные аналитические решения при известном из эксперимента изменении температуры в отдельной точке пластины во времени могут быть использованы для определения неизвестного источника теплоты, инициируемого какими-либо полями или, например, при полиморфном превращении металлов в процессе их кристаллизации. Могут быть идентифицированы также и любые другие заранее неизвестные параметры – начальные и граничные условия, физические свойства среды, размеры конструкции (толщина пластины).

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Kudinov V.A., Eremin A.V., Stefanyuk E.V. Analytical solutions of heat-conduction problems with time-varying heat-transfer coefficients // *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 2015. No. 3(88). P. 688 – 698.
2. Kudinov V.A., Eremin A.V., Stefanyuk E.V. Critical Conditions for Thermal Explosion in a Plate with a Nonlinear Heat Source // *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. 2016. No. 1(45). P. 38 – 43.
3. Eremin A.V., Stefanyuk E.V., Abisheva L.S. Research on Heat Conductivity with a Time-Varying Heat Source // *Applied Mechanics and Materials*. 2015. No. 698. P. 637 – 642.
4. Лыков А.В. Теория теплопроводности. – М.: Высшая школа, 1967. – 600 с.
5. Карташов Э.М. Аналитические методы в теплопроводности твердых тел. – М.: Высшая школа, 1979. – 415 с.
6. Карташов Э.М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. – М.: Высшая школа, 2001. – 550 с.
7. Цой П.В. Методы расчета задач тепломассопереноса. – М.: Энергоатомиздат, 1984. – 414 с.
8. Цой П.В. Системные методы расчета краевых задач тепломассопереноса. – М.: Изд-во МЭИ, 2005. – 568 с.
9. Болгарский А.В., Мухачев Г.А., Шукин В.К. Термодинамика и теплопередача. – М.: Высшая школа, 1975. – 495 с.
10. Лыков А.В. Тепломассоперенос: Справочник. – М.: Энергия, 1978. – 480 с.
11. Беляев Н.М., Рядно А.А. Методы нестационарной теплопроводности. – М.: Высшая школа, 1978. – 328 с.
12. Гудмен Т. Применение интегральных методов в нелинейных задачах нестационарного теплообмена: Сб. науч. тр.: Проблемы теплообмена. – М.: Атомиздат, 1967. С. 41 – 96.
13. Глазунов Ю.Т. Вариационные методы. Москва – Ижевск: НИЦ Регулярная и хаотическая динамика; Институт компьютерных исследований, 2006. – 470 с.
14. Кудинов В.А., Кудинов И.В. Методы решения параболических и гиперболических уравнений теплопроводности. – М.: Книжный дом «Либроком», 2011. – 280 с.
15. Кудинов И.В., Кудинов В.А. Аналитические решения параболических и гиперболических уравнений тепломассопереноса. – М.: Инфра-М, 2013. – 391 с.

Поступила 5 февраля 2015 г.

---

IZVESTIYA VUZOV. CHERNAYA METALLURGIYA = IZVESTIYA. FERROUS METALLURGY. 2016. VOL. 59. NO. 5, pp. 339–346.

---

## HEAT SOURCE IDENTIFICATION BASED ON ANALYTICAL SOLUTIONS OF THE HEAT-CONDUCTION PROBLEM

*A.V. Eremin, E.V. Stefanyuk, L.S. Abisheva*

#### REFERENCES

Samara State Technical University, Samara, Russia

**Abstract.** On the base of the temperature perturbations front and additional boundary conditions the authors have obtained the approximate analytical solution of the heat-conduction problem for infinite plate by boundary conditions of the third kind and time-variable heat source. Heat-conduction process was divided into two stages according to the time, that (dividing) helps to find simple analytical solutions for each stage separately. Obtained solutions are in the form of algebraic power series with time-dependent coefficients, those (coefficients) defined major and an extra boundary conditions, specified at the boundary points and at the temperature perturbations front, but in such a way that their implementation of the desired solution was equivalent to executing differential equations boundary-value problem in the whole range of spatial and temporal variables. Using described method it is possible to obtain analytical solutions in the entire time range of the non-stationary process, including small and the smallest values, almost with a given degree of accuracy. Obtained in this work, an analytical solution was used to identify time-varying source of warmth by solving the inverse heat-conduction problem.

**Keywords:** heat-conduction problem, infinite plate, approximate analytical solution, time-variable heat source, integral method, temperature perturbations front, additional (extra) boundary conditions, heat source identification.

DOI: 10.17073/0368-0797-2016-5-339-346

1. Kudinov V.A., Eremin A.V., Stefanyuk E.V. Analytical solutions of heat-conduction problems with time-varying heat-transfer coefficients. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 2015, no. 3(88), pp. 688–698.
2. Kudinov V.A., Eremin A.V., Stefanyuk E.V. Critical Conditions for Thermal Explosion in a Plate with a Nonlinear Heat Source. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. 2016, no. 1(45), pp. 38–43.
3. Eremin A.V., Stefanyuk E.V., Abisheva L.S. Research on Heat Conductivity with a Time-Varying Heat Source. *Applied Mechanics and Materials*. 2015, no. 698, pp. 637–642.
4. Lykov A.V. *Teoriya teploprovodnosti* [Theory of heat conduction]. Moscow: Vysshaya shkola, 1967, 600 p. (In Russ.).
5. Kartashov E.M. *Analiticheskie metody v teploprovodnosti tverdykh tel* [Analytical methods in thermal conduction of solids]. Moscow: Vysshaya shkola, 1979, 415 p. (In Russ.).
6. Kartashov E.M. *Analiticheskie metody v teorii teploprovodnosti tverdykh tel* [Analytical methods in thermal conduction of solids]. Moscow: Vysshaya shkola, 2001, 550 p. (In Russ.).
7. Tsoi P.V. *Metody rascheta zadach teplomassoperenosa* [Methods of calculating the heat and mass transfer problems]. Moscow: Energoatomizdat, 1984, 414 p. (In Russ.).
8. Tsoi P.V. *Sistemnye metody rascheta kraevykh zadach teplomassoperenosa* [System methods for calculating the boundary value problems of heat and mass transfer]. Moscow: Izdatel'stvo MEI, 2005, 568 p. (In Russ.).

9. Bolgarskii A.V., Mukhachev G.A., Shchukin V.K. *Termodinamika i teploperedacha* [Thermodynamics and heat transfer]. Moscow: Vysshaya shkola, 1975, 495 p. (In Russ.).
  10. Lykov A.V. *Tplomassoperenos: Spravochnik* [Heat and mass transfer: Handbook]. Moscow: Energiya, 1978, 480 p. (In Russ.).
  11. Belyaev N.M., Ryadno A.A. *Metody nestatsionarnoi teploprovodnosti* [Methods of non-stationary heat conduction]. Moscow: Vysshaya shkola, 1978, 328 p. (In Russ.).
  12. Goodman Theodore R. Application of Integral Methods to Transient Nonlinear Heat Transfer. In: *Advances in Heat Transfer, vol. 1*. New York – London: Academic Press, 1964. (Russ.ed.: Goodman T. In: *Problemyteploobmena*. Moscow: Atomizdat, 1967, pp. 41–96).
  13. Glazunov Yu.T. *Variatsionnye metody* [Variational methods]. Moscow – Izhevsk: NITs Regul'yarnaya i khaoticheskaya dinamika; Institut komp'yuternykh issledovaniy, 2006, 470 p. (In Russ.).
  14. Kudinov V.A., Kudinov I.V. *Metody resheniya parabolicheskikh i gi-perbolicheskikh uravnenii teploprovodnosti* [Methods for solving parabolic and hyper-hyperbolic heat conduction equations]. Moscow: Knizhnyi dom Librokom, 2011, 280 p. (In Russ.).
  15. Kudinov I.V., Kudinov V.A. *Analiticheskie resheniya parabolicheskikh i giperbolicheskikh uravnenii teplomassoperenosa* [Analytical solutions of parabolic and hyperbolic equations of heat and mass transfer]. Moscow: Infra-M, 2013, 391 p. (In Russ.).
- Acknowledgements.** This work was financially supported by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation in the framework of the basic part of the state task to “Samara State Technical University” (project code: 1273).
- Information about the authors:**
- A.V. Eremin**, Cand. Sci. (Eng.), Assist. Professor of the Chair “Theoretical Foundations of Thermal Engineering and Fluid Mechanics” (a.v.eremin@list.ru)
- E.V. Stefanyuk**, Dr. Sci. (Eng.), Professor of the Chair “Theoretical Foundations of Thermal Engineering and Fluid Mechanics” (totig@yandex.ru)
- L.S. Abisheva**, Assistant of the Chair “Theoretical Foundations of Thermal Engineering and Fluid Mechanics”

Received February 5, 2015