

УДК 669.189:621.746.62.001.57

## ПРИМЕНЕНИЕ НЕРАВНОМЕРНЫХ РАСЧЕТНЫХ СЕТОК ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ ФОРМИРОВАНИЯ НЕПРЕРЫВНОЛИТОЙ ЗАГОТОВКИ В КРИСТАЛЛИЗАТОРЕ МНЛЗ

*А.В. Федосов, к.т.н., доцент кафедры теории и компьютеризации  
литейного производства (fedosov-sol@mail.ru)*

Приазовский государственный технический университет  
(87500, Украина, г. Мариуполь, ул. Университетская, 7)

**Аннотация.** Предложен дискретный аналог дифференциального уравнения теплопроводности, позволяющий использовать неравномерные расчетные сетки для моделирования процесса непрерывной разливки. Такой способ задания сетки позволяет учесть распределение температурных градиентов в теле модели, что повышает точность аппроксимации и адекватность результатов расчета. Разработана математическая модель процессов кристаллизации и усадки непрерывнолитого сляба в кристаллизаторе МНЛЗ. Применение неравномерной расчетной сетки позволило при моделировании использовать элементы с размером порядка 1-2 мм. На основе этой модели проведены исследования по искажению профиля поперечного сечения сляба под воздействием стенок кристаллизатора. Расчет геометрического профиля позволяет уточнить условия теплового и механического взаимодействия затвердевающей корочки со стенками кристаллизатора и решить задачу на определение величин рациональной конусности кристаллизаторов МНЛЗ, обеспечивающих уменьшение пораженности заготовок поверхностными и подповерхностными трещинами.

**Ключевые слова:** метод конечных разностей, дифференциальное уравнение, дискретный аналог, непрерывнолитой слиток, кристаллизатор, конусность, тепловой поток, коэффициент теплоотдачи, усадка.

DOI: 10.17073/0368-0797-2016-2-82-87

Несмотря на то, что протяженность кристаллизатора относительно полной длины ручья МНЛЗ незначительна, процессы, протекающие в его пределах, оказывают существенное влияние на качество непрерывнолитых заготовок (НЛЗ). Зарождение и развитие большинства дефектов НЛЗ происходит именно в кристаллизаторе МНЛЗ [1 – 3]. В связи с этим методам исследования процессов, протекающих в кристаллизаторах МНЛЗ, уделяется так много внимания.

Развитие компьютерных технологий и ряд преимуществ методов математического моделирования определили широкое их применение при изучении металлургических процессов. На сегодняшний день в литературе представлен широкий спектр различных математических моделей формирования НЛЗ в кристаллизаторе МНЛЗ. Наиболее простые одномерные модели, как правило, применяют для решения сугубо тепловых задач охлаждения и затвердевания заготовок [4]. Разработка двумерных моделей позволяет производить расчеты прочности и усадки поперечного сечения заготовки [5 – 7]. При решении гидродинамических задач пространственная размерность модели должна быть представлена в трех измерениях [8 – 10]. Для численной реализации моделей наибольшее распространение получили методы конечных разностей (МКР) и конечных элементов (МКЭ). Последняя схема обладает рядом неоспоримых преимуществ: уни-

версальность, возможность описания формы объекта практически любой сложности, неравномерная дискретизация расчетных сеток и др. [8, 11, 12]. Однако недостатком реализации МКЭ является относительно высокая ресурсоемкость в отношении к персональным компьютерам.

Применение явной схемы МКР значительно сокращает требования вычислительной программы к машинным ресурсам. Поскольку в большинстве случаев профиль НЛЗ является прямоугольным, это позволяет применять МКР при сохранении высокой точности аппроксимации пространства модели. Эти обстоятельства привели к широкому использованию МКР при моделировании непрерывной разливки. Однако часто встречающимся недостатком большинства представленных в литературе конечно-разностных математических моделей является применение равномерной дискретизации геометрического пространства модели. Такой способ задания сетки не учитывает распределения температурных градиентов в теле модели, что ухудшает точность аппроксимации и, как следствие, – результатов расчета. В связи с этим разработка конечно-разностных методик, позволяющих оперировать неравномерными расчетными сетками, дает возможность приблизить их эффективность к эффективности конечно-элементных методов и значительно сократить машинную нагрузку. Однако в современной технической литературе уделя-

ется мало внимания применению неравномерных расчетных сеток при моделировании непрерывной разливки с использованием МКР.

Цель настоящего исследования – разработка конечно-разностной математической модели затвердевания и усадки слябовой заготовки в кристаллизаторе МНЛЗ, использующей неравномерную расчетную сетку, для повышения точности и скорости расчетов теплового и геометрического профилей НЛЗ.

Моделирование нестационарного процесса охлаждения отливок основано на решении базового дифференциального уравнения теплопроводности [12, 13]:

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial \tau} = \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) + Qv, \quad (1)$$

где  $T$  – температура металла, °C;  $C$  – теплоемкость металла, Дж/(кг·°C);  $\rho$  – плотность металла, кг/м<sup>3</sup>;  $\lambda$  – теплопроводность металла Вт/(м·°C);  $\tau$  – время, с;  $Qv$  – объемный источник тепла, Вт.

Применение МКР предусматривает замену бесконечно малых составляющих дифференциального уравнения конечными значениями посредством дискретизации моделируемого пространства и применения гипотезы о линейном изменении температуры в пределах элемента. При этом выражение (1) заменяется дискретным аналогом, из которого может быть получена система линейных уравнений. Обычно модель разбивают на равные по объему и форме прямоугольные элементы, что значительно упрощает дискретный аналог дифференциального уравнения и алгоритм построения расчетной сетки. Однако ввиду того, что такой подход обладает перечисленными выше недостатками, была разработана конечно-разностная модель, использующая неравномерную расчетную сетку.

Основным требованием к построению сетки для МКР является то, что узловые точки должны лежать на пересечениях линий, параллельных координатным осям, при этом варьируется только расстояние между этими линиями. Чем меньше шаг между линиями, тем (потенциально) точнее аппроксимация. В случае моделирования охлаждения слитка с учетом локальных коэффициентов теплоотвода желательнее повышать точность у корки слитка – на границе расчетной сетки. С учетом параболического характера распределения температуры в расчетной области предложено проводить расчет линейных размеров сетки по уравнению

$$\Delta x_i = \frac{L}{\sqrt{i}} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \right)^{-1}, \quad (2)$$

где  $\Delta x_i$  – линейный размер  $i$ -го элемента, м;  $L$  – общий линейный размер модели, м;  $i$  – номер элемента;  $n$  – общее количество элементов;  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$  – нормирующий коэффициент.

Нумерация элементов должна быть направлена от краев сетки к тепловому центру рассматриваемого сечения.

В большинстве случаев в МКР не проводится точный вывод уравнений из выражения (1). Вместо этого создаются упрощенные уравнения теплового баланса, оперирующие потоками, параллельными координатным осям и направленными от узла к узлу. При этом возникает понятие «контрольный объем» (КО), для которого производится расчет среднего значения теплового потока через его границы по направлениям координатных осей. На рис. 1 контрольные объемы заштрихованы.

Границы КО определяются пересечением линий, проведенных по средним точкам между координатами узлов расчетной сетки. При применении равномерной расчетной сетки геометрические размеры контрольных объемов и элементов сетки совпадают, а тепловой центр контрольного объема находится в его геометрическом центре (рис. 1, а), что существенно упрощает формулировку дискретного аналога дифференциального уравнения теплопроводности. При использовании неравномерной расчетной сетки появляются два варианта взаимного расположения КО и расчетных узлов сетки. В первом варианте расчетный узел располагается на пересечении диагоналей КО и ассоциируется с его тепловым центром. Однако при этом варианте невозможно получить узел на границе сетки. Проблема решается введением вокруг сетки дополнительного слоя нулевой толщины, создающего узлы на «открытых» гранях контрольных объемов (рис. 1, а). Новые объемы не нарушают физики, поскольку имеют нулевые теплоемкость и теплопроводность вдоль границы и бесконечно большую теплопроводность от границы в сетку. Однако ввод дополнительных узлов увеличивает размер системы уравнений.

Во втором подходе границы КО располагаются посередине между узлами расчетной сетки, которые в свою очередь смещены относительно геометрического центра КО (рис. 1, б). Второй вариант расстановки узлов выглядит проще, и узлы на границе можно получить без дополнительных приемов. Но смещение узлов относительно геометрических центров контрольных объемов усложняет вывод формул, связывающих поле температур с полем потоков, а также усложняет учет теплоемкости и свойств материала, зависящих от температуры, что в свою очередь может повлиять на точность метода.

В настоящей работе представлена двухмерная модель поперечного сечения НЛЗ. Применительно к условиям теплообмена в кристаллизаторе расчет может выполняться для четверти сечения НЛЗ. В таком случае по осям симметрии  $X$  и  $Y$  откладываются половины ширины и толщины сечения соответственно. Также в расчетах необходимо учитывать толщину сечения, которая зависит от условий разливки. Толщина направле-

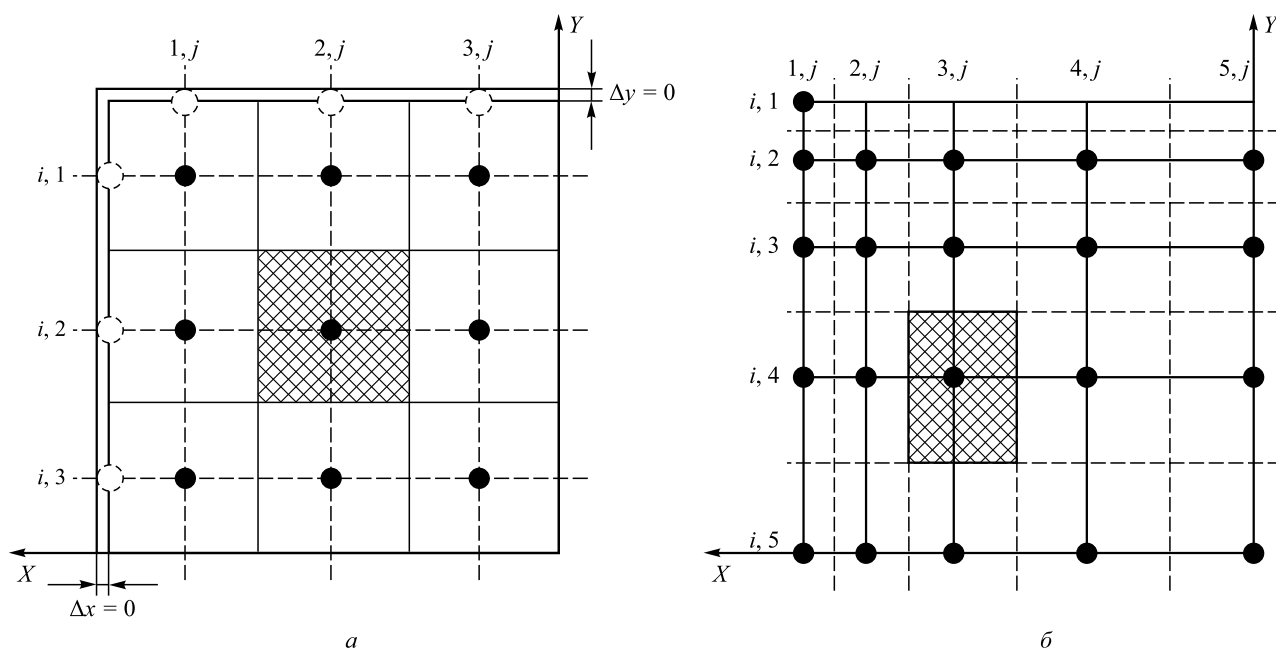


Рис. 1. Пример дискретизации двухмерного моделируемого пространства с использованием равномерной (а) и неравномерной (б) расчетных сеток

Fig. 1. Example of discretization and two-dimensional model-based space with the use of even (a) and uneven (b) estimated nets

на по оси Z, соответствующей продольной оси МНЛЗ, вдоль которой движется плоская система координат поперечного сечения. Для этих условий разработан вариант дискретного аналога уравнения (1), предусматривающий возможность применения неравномерных расчетных сеток со смещенным расположением узлов относительно центра КО:

$$\rho C_{\text{э}(i,j)} \frac{T_{i,j}^{k+1} - T_{i,j}^k}{\Delta \tau} V_{(i,j)} = (Qx_{(i+1,j)} + Qx_{(i-1,j)} + Qy_{(i,j+1)} + Qy_{(i,j-1)}), \quad (3)$$

где  $C_{\text{э}(i,j)}$  – эффективная теплоемкость материала в КО, ассоциированном с узлом  $(i,j)$ , Дж/кг (кроме непосредственной зависимости от температуры, учитывает теплоту фазового перехода [12]);  $T_{i,j}^{k+1}$  и  $T_{i,j}^k$  – температура в узле  $(i,j)$  в момент времени  $k$  и  $k+1$  соответственно, К;  $Qx$  и  $Qy$  – тепловые потоки по осям  $x$  и  $y$ , Вт;  $V_{(i,j)}$  – локальный объем, ассоциированный с узлом  $(i,j)$ , м<sup>3</sup>;  $\Delta \tau$  – шаг по времени, с.

Локальный объем рассчитывается по формуле

$$V_{(i,j)} = \frac{(y_{(j+1)} + y_{(j-1)})(x_{(i+1)} + x_{(i-1)})}{4} Z^k, \quad (4)$$

где  $x_{(i)}$  – координаты узла расчетной сетки по осям  $x$  и  $y$  соответственно, м;  $Z^k$  – толщина слоя поперечного сечения модели НЛЗ, м.

Толщина слоя определяется в соответствии со скоростью разливки ( $v$ , м/с) по уравнению

$$Z^k = v / \Delta \tau. \quad (5)$$

Для расчета тепловых потоков по осям используются следующие уравнения:

$$Qx_{(i-1,j)} = \left( \frac{\lambda_{(i-1,j)} + \lambda_{(i,j)}}{2} \right) \left( \frac{T_{i,j}^k - T_{i-1,j}^k}{x_{(i)} - x_{(i-1)}} \right) Sy_{(j)}; \quad (6)$$

$$Qx_{(i+1,j)} = \left( \frac{\lambda_{(i+1,j)} + \lambda_{(i,j)}}{2} \right) \left( \frac{T_{i+1,j}^k - T_{i,j}^k}{x_{(i+1)} - x_{(i)}} \right) Sy_{(j)}, \quad (7)$$

в которых  $\lambda$  – теплопроводность соответствующего узла, Вт/(м·К);  $Sy_{(j)}$  – площадь границы контрольного объема, параллельной осям  $Y$  и  $Z$ , определяется по формуле

$$Sy_{(j)} = \frac{y_{(j+1)} + y_{(j-1)}}{2} Z^k. \quad (8)$$

Тепловые потоки  $Qy$  в направлении оси  $Y$  и площади  $Sx_{(i)}$  в направлении осей  $X, Z$  рассчитываются аналогично уравнениям (6) – (8) с подстановкой соответствующих координат и величин.

Для узлов, расположенных по наружной границе, тепловые потоки с внешней стороны определяются на основании граничных условий третьего рода. Коэффициент теплоотдачи рассчитывается для каждого внешнего узла с учетом условий контактного теплообмена и теплообмена излучением через газовый зазор [14, 15]. При расчете контактного теплообмена учитывается толщина шлакообразующегося слоя (ШОС) в зазо-

ре между стенкой кристаллизатора и затвердевающей корочкой слитка. Толщина ШОС в начальный момент принимается в диапазоне 1 – 3 мм. В дальнейшем, по высоте кристаллизатора толщина ШОС изменяется в зависимости от условий усадки поперечного сечения заготовки и конусности стенок кристаллизатора.

Усадка поперечного сечения определяется на основании данных об изменении линейных размеров элементов по ортогональным направлениям  $X$  и  $Y$ :

$$l_{i,j}^{k+1} = l_{i,j}^k \left( 1 + \frac{(\alpha_{l_{i,j}^{k+1}} + \alpha_{l_{i,j}^k})}{2} (T_{i,j}^{k+1} - T_{i,j}^k) \right), \quad (9)$$

где  $l_{i,j}^k$  и  $l_{i,j}^{k+1}$  – линейный размер расчетного элемента в текущий и следующий момент времени соответственно, м;  $\alpha_t$  – коэффициент линейного расширения стали, зависящий от температуры,  $^{\circ}\text{C}^{-1}$ .

Следует учесть, что уравнение (9) описывает свободную усадку элементов расчетной сетки. Применение условия сплошности материала в модели позволит рассчитать геометрическую форму поперечного сечения заготовки, обусловленную процессом свободной усадки стали при ее затвердевании и охлаждении.

Результатами работы представленной математической модели являются тепловое поле и геометрическая форма поперечного сечения НЛЗ (рис. 2).

Прогнозирование геометрического профиля заготовки позволяет оценивать условия взаимодействия затвердевающей корочки со стенками кристаллиза-

тора и роль их конусности в процессе формирования непрерывнолитой заготовки. Абсолютные значения величины усадки корочки стали по длине широкой грани существенно превосходят значения по длине узкой грани. Это приводит к искажению профиля заготовки в ее углах, что хорошо видно на рис. 2. Применение неравномерной расчетной сетки позволяет детально (размеры элементов в углах заготовки на рис. 2 находятся на уровне 1,5 – 2,0 мм) оценить характер искажений профиля заготовки.

В представленных примерах расчета (рис. 2, б – з) рассмотрены несколько вариантов взаимодействия корочки стали со стенками кристаллизатора. Анализ результатов расчета позволяет сделать следующий ряд заключений.

На величину усадки корочки стали, сформированной по широкой грани заготовки, основное влияние оказывают физические свойства разливаемой стали и условия теплообмена по широким граням кристаллизатора. При этом локальные уменьшения коэффициента теплоотдачи в углах заготовки, вызванные изменением условий контакта и возникновением газового зазора, практически не оказывают влияния на величину усадки корочки в целом. Негативное влияние резких изменений теплового потока в углах заготовки сказывается на термонапряженном состоянии твердой корочки стали, что в результате увеличивает вероятность образования различного рода трещин.

Действие ферростатического давления на твердую оболочку слитка противоположно по направлению силам, возникающим в результате усадки. Превосходст-

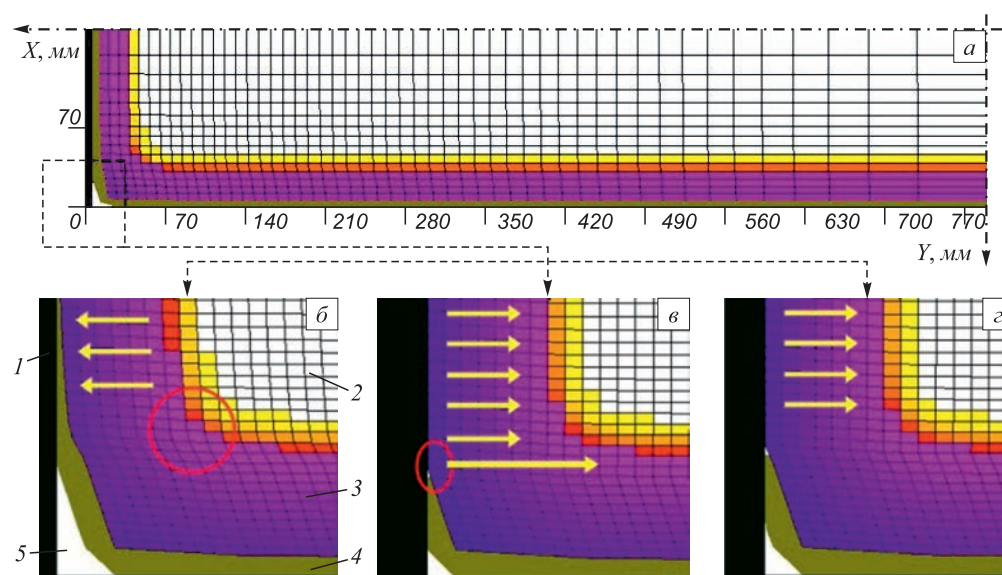


Рис. 2. Результаты расчета теплового и геометрического профилей поперечного сечения НЛЗ в нижней точке кристаллизатора: а – общий вид расчетной сетки; б – недостаточная конусность; в – избыточная конусность; г – рациональная конусность; 1 – кристаллизатор; 2 – жидкая сталь; 3 – твердая корочка стали; 4 – ШОС; 5 – газовый зазор

Fig. 2. Calculation results of thermal and geometrical profiles of cross-sections of a continuously cast billet in a bottom point of a crystallizer: а – general view of an estimated net; б – insufficient conicity; в – excess conicity; г – rational conicity; 1 – crystallizer; 2 – liquid steel; 3 – steel solid crust; 4 – slag-forming layer; 5 – gas clearance



во первой из сил приводит к выпучиванию заготовки и возникновению растягивающих деформаций, сопровождающихся образованием трещин в твердой корочке стали. В этом случае стенки кристаллизатора выступают в роли формообразователя заготовки и принимают на себя воздействие ферростатического давления. В зависимости от соотношения величин конусности стенок кристаллизатора и усадки твердой оболочки могут иметь место три варианта условий взаимодействия слитка и кристаллизатора.

На рис. 2, б представлен вариант недостаточной конусности узких стенок кристаллизатора. В этом случае происходит выпучивание узких граней слэба, что сопровождается появлением и развитием различных трещин в углах НЛЗ. Резкое уменьшение теплового потока в результате возникновения газового зазора в углах также усугубляет ситуацию.

Рис. 2, в – вариант избыточной конусности. В этом случае узкие стенки кристаллизатора воздействуют на корку стали, сформированную по широкой грани непрерывнолитой заготовки, поджимая ее в направлении оси заготовки. Усилия, приложенные к корке с двух сторон, могут вызывать ее деформацию и изменение условий контакта с широкими стенками кристаллизатора. Кроме этого, возрастает величина сил трения в углах нижней части кристаллизатора, что приводит к повышенному износу рабочих стенок кристаллизаторов и ухудшению качества поверхности НЛЗ.

Решая задачу оптимизации в рамках предложенной модели, возможно определение третьего варианта взаимодействия стенок кристаллизатора и корочки слитка – вариант рациональной конусности (рис. 2, г). В этом случае производится минимизация негативных факторов, имеющих место в первых двух представленных вариантах конусности кристаллизатора, и обеспечивается максимальное качество поверхности заготовки. Основным условием рациональной конусности стенок кристаллизатора является максимально точная компенсация усадки корочки стали. В результате достигается выравнивание тепловых потоков по периметру контакта заготовки и стенок кристаллизатора, улучшаются условия термонапряженного состояния корочки, минимизируются величины ее деформации и сил трения, возникающих между стенками кристаллизатора и корочкой слитка.

**Выводы.** Разработан новый вид конечноразностного дискретного аналога дифференциального уравнения нестационарной теплопроводности, позволяющий производить неравномерную геометрическую дискретизацию моделируемого пространства. Применение неравномерных расчетных сеток при моделировании процессов непрерывной разливки позволяет учесть характер распределения температурных градиентов по

сечению заготовки и тем самым существенно повысить эффективность работы модели. Разработанная математическая модель формирования непрерывнолитой заготовки в кристаллизаторе МНЛЗ позволяет проводить прогнозирование теплового и геометрического профилей заготовки. Расчет геометрического профиля дает возможность уточнить условия теплового и механического взаимодействия затвердевающей корочки со стенками кристаллизатора и решать задачу определения рациональной конусности кристаллизаторов МНЛЗ, обеспечивающих уменьшение пораженности заготовок поверхностными и подповерхностными трещинами.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Смирнов А.Н., Куберский С.В., Штепан Е.В. Непрерывная разливка стали: Учебник. – Донецк: изд. ДонНТУ, 2011. – 482 с.
2. Sengupta J., Thomas B.J., Shin H.J. etc. // Mechanism of Hook Formation during Continuous Casting of Ultra-low Carbon Steel Slabs // Metallurgical and Materials Transactions A. 2006. Vol. 37. № 5. P. 1597 – 1611.
3. Mills K.C., Fox A.B. // The role of mould fluxes in continuous casting-so simple yet so complex // ISIJ International. 2003. Vol. 43. № 10. P. 1479 – 1486.
4. Шишкин В.А., Кузнецова Н.П., Чугункова М.С. Исследование и совершенствование тепловой работы кристаллизатора машин непрерывного литья стальных заготовок // Изв. вуз. Черная металлургия. 2010. № 1. С. 55 – 57.
5. Meng Y., Li C., Parkman J., Thomas B.G. // Simulation of Shrinkage and Stress in Solidifying Steel Shells of Different Grades // Solidification Processes and Microstructures: A symposium in honor of Wilfried Kurz. Edited by M. Rappaz TMS, Charlotte, NC, March 15 – 18, 2004, pp. 33 – 39.
6. Ivanova A.A. // Criteria of the quality of the temperature field of a continuous-cast ingot // Metallurgist. 2012. Vol. 55, No. 9, January, pp. 710 – 719.
7. Гридин С.В. Исследование усадочных явлений при формировании слэбовой заготовки в зоне кристаллизатора // Металлургическая и горнорудная промышленность. 2004. № 8. С. 176 – 180.
8. Jong-Kyu Yoon // Applications of Numerical Simulation to Continuous Casting Technology // ISIJ International. 2008. Vol. 48, no. 7, pp. 879 – 884.
9. Thomas B.G., Zhang L. // Mathematical modeling of fluid flow in continuous casting // ISIJ International. 2001. Vol. 41, no. 10, pp. 1181 – 1193.
10. Wang Y., Zhang L. // Transient Fluid Flow Phenomena during Continuous Casting: Part II — Cast Speed Change, Temperature Fluctuation, and Steel Grade Mixing // ISIJ International. 2010. Vol. 50, no. 12, pp. 1783 – 1791.
11. Шлютер Й., Фалькенрек У., Кемпкен Й. и др. Цифровое гидродинамическое моделирование в черной металлургии // Черные металлы. 2009. № 2. С. 42 – 49.
12. Патанкар С.В. Численное решение задач теплопроводности и конвективного теплообмена при течении в каналах. – М.: изд. МЭИ, 2003. – 312 с.
13. Журавлев В.А., Китаев Е.М. Теплофизика формирования непрерывного слитка. – М.: Металлургия, 1974. – 216 с.
14. Дюдкин Д.А. Качество непрерывнолитой стальной заготовки. – Киев: Техніка, 1988. – 253 с.
15. Емельянов В.А. Тепловая работа машин непрерывного литья заготовок. – М.: Металлургия, 1988. – 143 с.

Поступила 15 октября 2015 г.

## USAGE OF UNEVEN ESTIMATED NETS FOR MATHEMATICAL MODELING OF THE PROCESSES OF CONTINUOUS CAST BILLET FORMATION IN A CCM CRYSTALLIZER

**A.V. Fedosov**

**Azov State Technical University, Mariupol, Ukraine**

**Abstract.** The discrete analog of differential equation of heat conduction allowing applying irregular computational net for the mathematical modeling of continuous casting was proposed. This method of meshing allows taking into account the distribution of temperature gradients in the model. It improves accuracy of the approximation and adequacy of the computation results. The mathematical model of crystallization and shrinkage of slab in CCM mold was developed. Application of irregular computational net allowed using the elements of size of 1–2 mm in modeling. The researches of slab cross-section profile distortion under the influence of the mold were conducted on the basis of this model. Calculation of the geometrical profile allows to specify the conditions of the thermal and mechanical interaction of the solidified shell with the mold walls and to solve the task of determination of optimal mold taper of CCM, ensuring reduction in number of slabs affected by surface and subsurface cracks.

**Keywords:** finite-difference method, differential equation, discrete analog, continuously cast ingot, crystallizer, conicity, heat flow, heat transfer coefficient, shrinkage.

**DOI:** 10.17073/0368-0797-2016-2-82-87

### REFERENCES

1. Smirnov A.N., Kuberskii S.V., Shtepan E.V. *Nepreryvnaya razlivka stali: Uchebnik* [Continuous casting of steel: Textbook]. Donetsk: izd. DonNTU, 2011, 482 p. (In Russ.).
2. Sengupta J., Thomas B.J., Shin H.J. etc. Mechanism of Hook Formation during Continuous Casting of Ultra-low Carbon Steel Slabs. *Metallurgical and Materials Transactions A*. 2006, vol. 37, no. 5, pp. 1597–1611.
3. Mills K.C., Fox A.B. The role of mold fluxes in continuous casting—so simple yet so complex. *ISIJ International*. 2003, vol. 43, no. 10, pp. 1479–1486.
4. Shishkin V.A., Kuznetsova N.P., Chugunkova M.S. Study and improvement of heat work of continuous caster mold. *Izvestiya VUZov. Chernaya metallurgiya = Izvestiya. Ferrous Metallurgy*. 2010, no. 1, pp. 55–57. (In Russ.).
5. Meng Y., Li C., Parkman J., Thomas B.G. Simulation of Shrinkage and Stress in Solidifying Steel Shells of Different Grades. *Solidification Processes and Microstructures: A symposium in honor of Wilfried Kurz*. Ed. M. Rappaz TMS, Charlotte, NC, March 15–18, 2004, pp. 33–39.
6. Ivanova A.A. Criteria of the quality of the temperature field of a continuous-cast ingot. *Metallurgist*. 2012, vol. 55, no. 9, pp. 710–719.
7. Gridin S. V. Research of shrinkage phenomena at the formation of slab blanks in a crystallizer zone. *Metallurgicheskaya i gornorudnaya promyshlennost'*. 2004, no. 8, pp. 176–180. (In Russ.).
8. Jong-Kyu Yoon. Applications of Numerical Simulation to Continuous Casting Technology. *ISIJ International*. 2008, vol. 48, no. 7, pp. 879–884.
9. Thomas B.G., Zhang L. Mathematical modeling of fluid flow in continuous casting. *ISIJ International*. 2001, vol. 41, no. 10, pp. 1181–1193.
10. Wang Y., Zhang L. Transient Fluid Flow Phenomena during Continuous Casting: Part II—Cast Speed Change, Temperature Fluctuation, and Steel Grade Mixing. *ISIJ International*. 2010, vol. 50, no. 12, pp. 1783–1791.
11. Shlyuter I., Fal'kenrek U., Kempken I. etc. Digital hydrodynamic simulation in ferrous metallurgy. *Chernye metally*. 2009, no. 2, pp. 42–49. (In Russ.).
12. Patankar Suhas V. *Computation of conduction and duct flow heat transfer*. Innovative Research, Inc. Maple Grove, MN, 1991. (Russ. ed.: Patankar S.V. *Chislennoe reshenie zadach teploprovodnosti i konvektivnogo teploobmena pri techenii v kanalakh*. Moscow: izd. MEI, 2003, 312 p.).
13. Zhuravlev V.A., Kitaev E.M. *Teplofizika formirovaniya nepreryvnogo slitka* [Thermal physics of continuously cast ingot formation]. Moscow: Metallurgiya, 1974, 216 p. (In Russ.).
14. Dyudkin D.A. *Kachestvo nepreryvnolitoi stal'noi zagotovki* [Quality of a continuously cast steel billet]. Kiev: Tekhnika, 1988, 253 p. (In Russ.).
15. Emel'yanov V.A. *Teplovaya rabota mashin nepreryvnogo lit'ya zagotovok* [Thermal work of CCM]. Moscow: Metallurgiya, 1988, 143 p. (In Russ.).

### *Information about the authors:*

**A.V. Fedosov**, Cand. Sci. (Eng.), Assist. Professor of the Chair of Technology and Computerization of Foundry (fedosov-sol@mail.ru)

Received October 15, 2015