

З.К. Кабаков¹, И.Ю. Мазина², Т.А. Окунева¹

¹Череповецкий государственный университет

²Филиал Военной академии Министерства обороны РФ (г. Череповец)

ТЕСТИРОВАНИЕ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ЗАТВЕРДЕВАНИЯ ПЛОСКОЙ ЗАГОТОВКИ НА ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ УСТАНОВКЕ НЕПРЕРЫВНОЙ РАЗЛИВКИ МЕТАЛЛА

Аннотация. Изложен способ тестирования численных моделей двухмерной задачи Стефана с использованием точного решения. Приведены математическая модель, аналитическое решение рассматриваемой задачи, используемое для тестирования. Представлены результаты исследования влияния настроечных параметров численного алгоритма на погрешность моделирования.

Ключевые слова: математическая модель затвердевания металла, тестирование, двухмерная задача Стефана, погрешность решения.

PECULIARITIES OF BINARY EUTECTIC'S CRYSTALLIZATION IN THREE-COMPONENT SYSTEM

Abstract. The method for testing numerical models of a two-dimensional Stefan problem using the exact solution is stated. The mathematical model and the analytical solution of the considered problem used for the testing are provided. Research results of influence of setting parameters of numerical algorithm on a modeling error are presented.

Keywords: Mathematical model of metal solidification, testing, two-dimensional Stefan problem, solution error.

Разработка металлургических агрегатов и совершенствование их работы часто связаны с исследованиями температурных полей, перемещения границ фазовых переходов, и в частности, процесса затвердевания металлов. Важная роль в этих исследованиях принадлежит математическому моделированию. Как правило, задачи затвердевания являются нелинейными и многомерными, поэтому для их решения применяются численные методы. Однако в работах [1, 2], в которых применяется математическое моделирование процессов затвердевания, уделяется недостаточно внимания вопросу тестирования алгоритмов численного решения.

В настоящей работе предложен метод тестирования численного решения задачи затвердевания, основанный на использовании точного решения задачи Стефана. Метод изложим на примере тестирования численного решения задачи затвердевания плоской заготовки на горизонтальной установке непрерывной разливки металла [3]. В работе [3] эта задача сформулирована для обоснования основных конструктивных и технологических параметров установки для горизонтальной непрерывной разливки металла с электромагнитным подвешиванием. Такая установка позволяет получать прутки толщиной не более 10 мм с гладкой поверхностью. В установке с электромагнитным подвешиванием струя жидкого металла затвердевает во взвешенном состоянии под действием поля электромагнитных сил, которые возникают при скрещении магнитного

поля и электрического тока, пропускаемого через заготовку. Схема установки показана на рис. 1.

Устройство для литья представляет собой промежуточный ковш. Металл после выхода из разливочного стакана поддерживается электромагнитной силой $f = iB$ (здесь i – плотность тока в заготовке; B – индукция магнитного поля), возникающей в струе при скрещении во взаимно перпендикулярных направлениях постоянного магнитного поля и постоянного электрического тока. Магнитное поле создается электромагнитом. От жидкого металла к затвердевшему проходит ток, подводимый с помощью электрода и роликов. Жидкий металл охлаждается сначала за счет излучения и свободной конвекции, а затем водой. Затвердевшая заготовка вытягивается роликами.

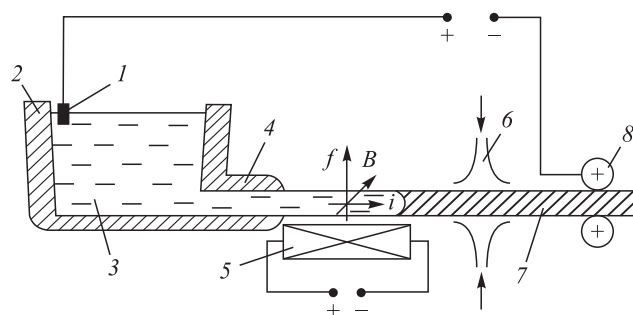


Рис. 1. Схема установки литья:

1 – электрод; 2 – промежуточный ковш; 3 – жидкий металл; 4 – стакан; 5 – электромагнит; 6 – водяное охлаждение; 7 – готовая заготовка; 8 – ролики

На рис. 2 показана схема расчетной области, которая выбрана в сечении, проходящем через широкие грани заготовки.

Математическая модель процесса затвердевания на предложенной установке включает сквозное уравнение теплопроводности, учитывающее выделение теплоты кристаллизации двойного сплава в интервале температур ликвидус – солидус,

$$c_{эф}\rho\left(\frac{\partial T}{\partial t} + v\frac{\partial T}{\partial z}\right) = \lambda\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \lambda\frac{\partial^2 T}{\partial x^2};$$

$$c_{эф} = \begin{cases} c(T) & \text{при } T < T_c, T > T_l; \\ c(T) + \frac{L}{T_l - T_c} & \text{при } T_c \leq T \leq T_l, \end{cases} \quad (1)$$

интегрируемое в области $0 \leq x \leq S, 0 \leq z \leq h, 0 \leq t \leq t_k$, и граничные условия:

при $z = 0, 0 \leq x \leq S$ $T(x, 0, t) = T^0;$ (2)

при $x = 0, 0 \leq z \leq h$ $\lambda\frac{\partial T}{\partial x} = 0;$ (3)

при $x = S, 0 \leq z \leq l_{п}$
 $-\lambda\frac{\partial T}{\partial x} = \alpha_k(T_{п} - T_{cp}) + \sigma_0\varepsilon'(T_{п}^4 - T_{cp}^4);$ (4)

при $x = S, l_{п} \leq z \leq h$ $-\lambda\frac{\partial T}{\partial x} = \alpha_b(T_{п} - T_b);$ (5)

при $z = h, 0 \leq x \leq S$ $\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0,$ (6)

где $c_{эф}$ – эффективная теплоемкость [4]; ρ – плотность; v – скорость литья; $T_{п}$ и T_{cp} – температура поверхности и среды; T^0 – температура расплава, выходящего из промежуточного ковша; $T_{л}$ и T_c – температура ликвидуса и солидуса; λ – коэффициент теплопроводности; $c(T)$ – теплоемкость металла; L – удельная теплота кристаллизации; S – половина ширины заготовки; h – длина расчетной области; $l_{п}$ и $l_{охл}$ – длина зоны

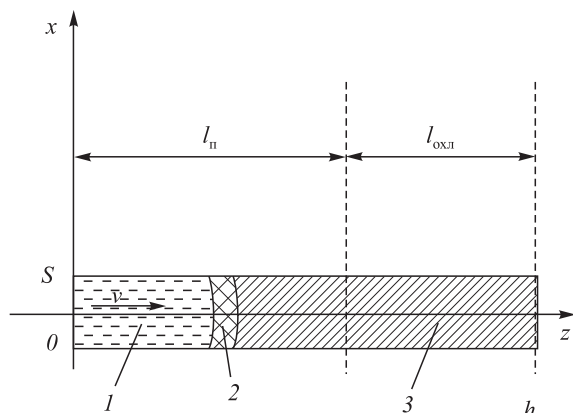


Рис. 2. Схема расчетной области:
 1 – жидкая фаза; 2 – двухфазная зона; 3 – твердая фаза

поддержки и зоны охлаждения; α_k – коэффициент теплоотдачи конвекцией; σ_0 – излучение абсолютно черного тела; ε' – степень черноты тела; α_b – коэффициент теплоотдачи к воде; ε – граница фазового перехода (длина жидкой фазы).

Система уравнений (1) – (6) решена численным методом – методом конечных разностей. Значения температуры рассчитывали в узлах расчетной области, координаты которых находили по формулам $x_i = (i - 0,5)\Delta x, z_j = (j - 0,5)\Delta z$ для дискретных моментов времени $t^n = \Delta t n$, где $i = 0, N + 1; j = 0, M + 1; N \times M$ – количество узлов внутри расчетной области; $0, \dots, N + 1$ и $0, \dots, M + 1$ – номера фиктивных узлов, находящихся за пределами области на расстоянии $\Delta x/2$ и $\Delta z/2$ соответственно; $\Delta x = S/N$ и $\Delta z = h/M$ – расстояния между узлами по осям

Ox и $Oz; n = 0, \left[\frac{t_k}{\Delta t}\right]$ – моменты времени ($n = 0$ – начальный момент времени); Δt – расчетный шаг по времени (для краткости температура $T(x_i, z_j, t^n)$ обозначена $T_{i,j}^n$. Использовали явную схему аппроксимации производных по координатам.

Численное решение при явной схеме аппроксимации является условно устойчивым, значение Δt рассчитывается из условия $\Delta t = \min(\Delta t_1, \Delta t_2)$, где $\Delta t_1 = \frac{c\rho}{k_1\lambda\left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta z^2}\right)}$ и $\Delta t_2 = \frac{\Delta z}{vk_2}$, $k_1, k_2 > 2$. Погреш-

ность численного решения в таком случае зависит от настроечных параметров алгоритма N, M, k_1 и k_2 , а также параметра $\Delta T = T_{л} - T_c$ в математическом описании затвердевания пластины. Эти параметры необходимо выбирать таким образом, чтобы погрешность результатов моделирования не превосходила заданную.

Для проведения тестирования необходимо точное решение. Для этого упростили постановку задачи так, чтобы можно было получить аналитическое решение задачи затвердевания заготовки. Вместо двухмерной задачи затвердевания бинарного сплава рассмотрели затвердевание заготовки из чистого металла и только вдоль оси Oz . При условии $z = h$ задали температуру поверхности постоянной ($T_{п}$). Упрощенная задача имеет аналитическое решение, включающее поля температуры

в твердой фазе $T_1(z, t) = T_{кр} - \frac{(T^0 - T_{кр})(1 - e^{h_z})}{1 - e^{h_z\varepsilon}};$ (7)

в жидкой фазе $T_2(z, t) = T_{кр} - \frac{(T_{кр} - T_{cp})(e^{b_2\varepsilon} - e^{b_2z})}{e^{b_2\varepsilon} - e^{b_2h}},$ (8)

и уравнение для расчета координаты границы фазового перехода при температуре кристаллизации

$$\lambda_1 b_1 \frac{T^0 - T_{кр}}{1 - e^{h_z\varepsilon}} e^{h_z\varepsilon} - \lambda_2 b_2 \frac{T_{кр} - T_{п}}{e^{b_2\varepsilon} - e^{b_2h}} e^{b_2\varepsilon} = \rho L v; \quad (9)$$

здесь $b_i = c_i \rho v / \lambda_i$, $i = 1, 2$; λ_1 и λ_2 – теплопроводность твердой и жидкой фазы; c_1 и c_2 – теплоемкость твердой и жидкой фазы; T^0 – начальная температура расплава; $T_{кр}$ – температура кристаллизации.

В качестве температур ликвидуса и солидуса в задаче, решенной методом конечных разностей, приняли $T_{л} = T_{кр} + \Delta T / 2$, $T_{с} = T_{кр} - \Delta T / 2$, $\Delta T = T_{л} - T_{с}$ – фиктивный интервал кристаллизации. Длина ε жидкой фазы отсчитывается от $x = 0$ до координаты изотермы $T_{кр}$ и находится по следующей формуле:

$$\varepsilon = \Delta z \left(j - \frac{3}{2} \right) + \Delta z \frac{T_{кр} - T_{i,j-1}}{T_{i,j} - T_{i,j-1}} \text{ при } T_{i,j-1} \leq T_{кр} < T_{i,j}$$

Тестирование выполнено на конкретном типичном варианте использования модели для изучения затвердевания и охлаждения алюминиевой заготовки толщиной 3 мм, охлаждаемой в симметричных условиях. Исходные данные для моделирования и расчета по формулам (7) – (9) приведены ниже:

Параметр	Значение параметра для модели	Точное решение
S , м	0,0015	–
h , м	0,03	0,03
T^0 , °C	685	685
$T_{п}$, °C	–	130
$T_{кр}$, °C	130	–
ρ , кг/м ³	2700	2700
λ , Вт/(м·°C)	238	238
c , Дж/(кг·°C)	920	920
$T_{кр}$, °C	660	660
L , Дж/кг	357 000	357 000
α_k , Вт/(м ² ·°C)	0	–
α_b , Вт/(м ² ·°C)	0	–
ε'	0	–
τ , мин	0,3	–
v , м/мин	0,3	0,3

Примечание. τ – конечное время процесса.

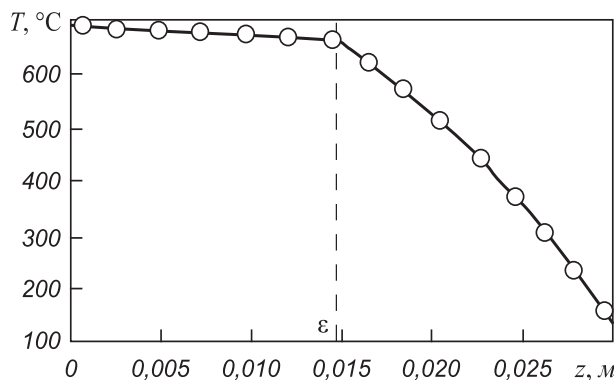


Рис. 3. Распределение температуры по длине слитка:

○ – точное решение (формулы (7) – (9)); — – модель при $M = 300$, $k_1 = k_2 = 5$, $\Delta T = 5$ °C

Тестирование результатов моделирования выполнили путем сравнения с точным решением (7) – (9) и оценкой погрешности моделирования. При тестировании исследовали влияние настроечных параметров конечно-разностного решения задачи затвердевания (M , ΔT , k_1 , k_2) на результаты и погрешность моделирования.

Результаты исследования представлены на рис. 3 – 5.

На рис. 3 показано поле температуры по длине заготовки, полученное моделированием и с использованием точного решения. На рис. 4 приведена относительная погрешность моделирования температурного поля по длине слитка, которую рассчитывали по формуле

$$\delta = \frac{|T - T^*|}{T^*} 100 \%,$$

где T – результат моделирования температурного поля; T^* – точное значение температуры в момент времени t_k .

Наибольшая погрешность прогноза толщины корки наблюдается в окрестности границы фазового перехода.

На рис. 5 приведены результаты исследования влияния количества узлов M на относительную погрешность прогнозирования длины жидкой фазы. При увеличении количества узлов от 150 до 300 погрешность сокращается в два раза.

Исследование влияния величины ΔT на погрешности решения показало, что зависимость относительной погрешности от величины фиктивного интервала ΔT носит экстремальный характер, причем погрешность увеличивается с уменьшением и увеличением ΔT , существует оптимальный (8 – 12 °C) интервал, в котором погрешность минимальна. Отсюда следует, что величину ΔT нужно выбирать из условия минимума погрешности.

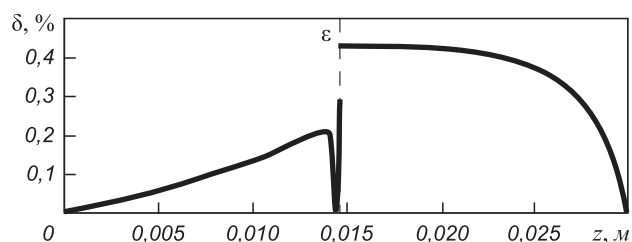


Рис. 4. Распределение относительной погрешности δ расчета температурного поля по длине заготовки при $M = 300$, $k_1 = k_2 = 5$, $\Delta T = 5$ °C

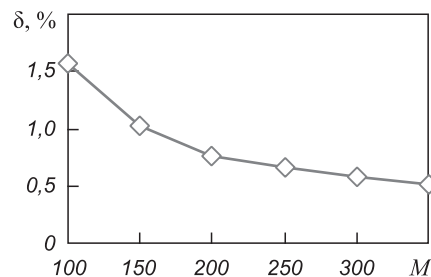


Рис. 5. Зависимость относительной погрешности определения длины жидкой фазы от M при $k_1 = k_2 = 5$, $\Delta T = 10$ °C

Оценка величин Δt_1 и Δt_2 показала, что, как правило, значения Δt_1 меньше Δt_2 на три порядка, поэтому значение Δt выбирается равным Δt_1 . В связи с этим относительную погрешность прогноза длины жидкой фазы исследовали при варьировании только коэффициента k_1 ; варьирование этого коэффициента в интервале 3 – 10 не показало влияния на погрешность.

Выводы. При тестировании численного решения задачи затвердевания, полученного методом конечных разностей с использованием явной схемы аппроксимации производных, получены следующие результаты: одновременное измельчение сетки и соответствующее уменьшение шага по времени согласно условию устойчивости существенно влияет на уменьшение погрешности; в результате тестирования установлено, что для уменьшения относительной погрешности до 1% необходимое количество узлов сетки по оси Oz не менее 200; величину фиктивного

интервала ΔT при численном решении задачи Стефана следует подбирать из условия минимума относительной погрешности.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Крупный слиток / А.Н. Смирнов, С.Л. Макуров, В.М. Сафонов, А.Ю. Цупрун. – Д.: Металлургия, 2009. – 278 с.
2. Иванова А.А. – В кн.: Труды ИПММ НАН Украины. Т. 16. – Донецк: ИПММ, 2008. С. 93 – 102.
3. Кабаков З.К., Мазина И.Ю. – В кн.: Автоматизация и энергосбережение машиностроительного и металлургического производств, технология и надежность машин, приборов и оборудования. Материалы шестой международной науч.-техн. конференции. Т. 1. – Вологда: изд. ВоГТУ, 2010. С. 132 – 135.
4. Тепловые процессы при непрерывном литье стали / Ю.А. Самойлович, С.А. Крулевецкий, В.А. Горяинов, З.К. Кабаков. – М.: Металлургия, 1982. – 152 с.

© 2013 г. З.К. Кабаков, И.Ю. Мазина, Т.А. Окунева
Поступила 13 марта 2012 г.

УДК 621.78:532.54

Э.Е. Бейгельзимер¹, Я.Е. Бейгельзимер²

¹ Научно-производственное общество «Доникс»

² Донецкий национальный технический университет

МЕТОДИКА РАСЧЕТА ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ РАЗМЕРОВ ПЯТНА ОРОШЕНИЯ СПРЕЙЕРНОЙ СТРУИ НА ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ЛИСТОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Аннотация. Завершен цикл исследований по разработке аналитической модели геометрии пятна орошения спрейерной жидкой струи на плоской поверхности. Показан способ приближенного учета силы тяжести и сопротивления среды при расчете размеров пятна орошения наклонных струй, натекающих как на верхнюю, так и на нижнюю поверхности горизонтального листа. Результаты работы могут быть использованы при проектировании установок и технологии охлаждения и закалки горячих металлических листов спрейерными струями жидкости.

Ключевые слова: пятно орошения, струя, технология, аналитическая модель.

CALCULATION METHOD OF THE ACTUAL SPOT SIZE OF SPRAY JET IRRIGATION ON THE HORIZONTAL SHEET SURFACE

Abstract. Series of studies of the analytical model development of the spot geometry of spray jet irrigation on the flat surface is completed. The method of approximate calculation of gravity and environmental resistance for estimation of spot sizes of inclined jet irrigation, accumulating both on the top and the bottom surfaces of the horizontal sheet, is described. The results can be used for the design of installations and cooling technologies and quenching of hot metal sheets by spray liquid jets.

Keywords: spot irrigation, jet, technologie, analytical model.

Во многих процессах металлургического производства (в зоне вторичного охлаждения МНЛЗ, при ускоренном охлаждении проката, при гидросбиве окалины, при закалке металла и др.) используется подача на листовую поверхность жидкости из форсунок в виде спрейерных струй, состоящих из множества отдельных капель. Эффективность такой обработки во многом зависит от размеров *пятна орошения* – области, в пределах которой происходит первичный контакт жидких ка-

пель с поверхностью. В работе [1] получены формулы для расчета так называемых *теоретических* размеров пятна орошения при допущении, что границы струи являются прямыми линиями. Фактически форма струи является криволинейной, поскольку траектории полета капель искривляются под действием силы тяжести и сопротивления среды [2]. Размеры пятна орошения, учитывающие реальную форму струи, называют *действительными*.