

УДК 621.746

АНАЛИТИЧЕСКИЕ РАСЧЕТЫ РЕЖИМОВ ЗАТВЕРДЕВАНИЯ И ОХЛАЖДЕНИЯ КРУПНОТОННАЖНЫХ ПРОМЫШЛЕННЫХ СЛИТКОВ. СООБЩЕНИЕ 1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ВЫВОД РАСЧЕТНЫХ СООТНОШЕНИЙ ДЛЯ СХЕМЫ ТЕРМИЧЕСКОГО СЛОЯ

Постольник Ю.С., д.т.н., профессор

Тимошпольский В.И.¹, д.т.н., профессор, директор по науке и новой технике (tree-89@mail.ru)

Трусова И.А.², д.т.н., профессор, заведующий кафедрой металлургических технологий

¹ Научно-производственная группа компаний «Нефтегазстройизоляция»

(113017, Россия, г. Москва, Малый Толмачевский пер., 8)

² Белорусский национальный технический университет

(220013, Беларусь, г. Минск, пр. Независимости, д. 65)

Аннотация. Разработана методика расчета полного времени затвердевания бьюмингового слитка. В качестве математического метода решения сформулированной задачи затвердевания и охлаждения слитков применен хорошо зарекомендовавший себя для решения задач металлургической теплотехники метод эквивалентных источников (МЭИ) Ю.С. Постольника. Решение задачи выполнено в соответствии со схемой термического слоя для двух последовательных этапов теплообмена: инерционного и регулярного. Сопоставление расчетных данных для промышленного бьюмингового слитка по МЭИ с результатами опытных данных и по методу Л.С. Лейбензона показали удовлетворительное согласование по времени полного затвердевания, что позволяет использовать полученное решение при расчетах процессов затвердевания промышленных слитков. Предлагаемая методика может быть использована в теплотехнических расчетах режимов затвердевания и охлаждения слитков и заготовок при разливе в изложницы и в процессе непрерывного литья для оценки времени полного затвердевания слитка и температурного поля.

Ключевые слова: затвердевание и охлаждение слитков, математическое моделирование, нелинейная задача теплопроводности, схема термического слоя, метод эквивалентных источников.

DOI: 10.17073/0368-0797-2015-8-550-556

Анализ исследований в области металлургической теплотехники и теплофизики за последние 50 – 60 лет показывает, что многие известные ученые – Г.П. Иванов, Л.С. Лейбензон, Э.М. Гольдфарб, А.И. Вейник, Ю.А. Самойлович, Б.Я. Любов, М.А. Глинков, В.А. Ефимов [1 – 9] – уделяли значительное внимание задачам нелинейной теплопроводности, в которых одновременно необходимо определить и температуру тела, и закон продвижения раздела фаз с выделением (поглощением) теплоты.

Если всесторонне рассматривать и тем более решать насущные проблемы и задачи в металлургических технологиях с целью их влияния на ход технологического процесса, не вызывает сомнений тот факт,

что исключительно важные прикладные задачи металлургической теплотехники, обозначенные как «проблема Стефана» [10], являются одними из главных в металлургии. Это обусловлено тем, что сами термины «плавление», «затвердевание», «кристаллизация», «нагревание», «охлаждение» являются важнейшими в металлургии, ибо без их использования не представляется возможным решить ни одну из многих существующих теплотехнических и технологических задач: режим плавления легирующих компонентов, окатышей; затвердевание-охлаждение непрерывнолитых заготовок; процесс производства крупных бьюминговых слитков и т.д.

Вопросы, присущие стефановской тематике, имеют, по нашему мнению, значительное прикладное значение в металлургической теплотехнике и теплофизике¹ [11, 12].

В настоящей работе приводятся результаты исследований по теории затвердевания крупнотоннажных бьюминговых слитков, при этом разработанная на основе теоретических результатов технология опробована и внедрена на ряде крупных металлургических комбинатов.

¹ При подготовке конкретной публикации принято во внимание, что в 2015 г. отмечается 90 лет выдающемуся советскому и украинскому ученому в области металлургической теплофизики, теплотехники и термомеханики, д.т.н., профессору Юрию Степановичу Постольнику (1925 – 2007 гг.), имя которого увековечено теоретическими работами в области нелинейной теплопроводности; кроме того, руководствовались и публикациями в известных советских и российских журналах международного уровня и, прежде всего, в журнале «Известия высших учебных заведений. Черная металлургия».

В работах [13, 14] приведены аналитические способы расчетов режимов затвердевания слитков (отливок), основанные на интегральных методах и методе конформных отображений. Следует отметить, что достаточно эффективно зарекомендовал себя метод эквивалентных источников Ю.С. Постольника, введенный в аналитическую теорию теплопроводности еще в начале 60-х гг. XX столетия и весьма высокоэффективно проявивший себя при решении ряда нелинейных задач, в том числе и задач с подвижными границами, которые можно отнести к проблеме Стефана [15, 16].

Целью настоящего исследования является разработка метода расчета режима затвердевания крупнотоннажного бьюмингового слитка при использовании известных теоретических предпосылок, который возможно будет рекомендовать в качестве базового инженерного способа в реальных технологических условиях остывания заготовки и последующего нагрева.

Исходная математическая модель описывается следующей системой уравнений:

$$\frac{1}{1-\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[(1-\xi) \frac{\partial \theta_j}{\partial \xi} \right] = K_a^{2-j} \frac{\partial \theta_j}{\partial \tau}, \quad j=1, 2; \quad (1)$$

$$\left. \frac{\partial \theta_1}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} = Bi_1 \theta_1(0, \tau), \quad \theta_j(\xi, \tau) \Big|_{\xi=l(\tau)} = 1, \quad \left. \frac{\partial \theta_2}{\partial \xi} \right|_{\xi=1} = 0; \quad (2)$$

$$K_a K_o l(\tau) = \sum_{j=1}^2 (K_\lambda K_T)^{j-1} \left. \frac{\partial \theta_j}{\partial \xi} \right|_{\xi=l(\tau)}, \quad \theta_2(\xi, \tau_0) = \varphi(\xi), \quad (3)$$

где индекс $j=1$ – для затвердевшей оболочки; $j=2$ – для жидкой сердцевины; $\theta_1(\xi, \tau) = \frac{T_1(\xi, \tau) - T_c}{T_0 - T_c}$;

$$\theta_2(\xi, \tau) = \frac{T_0 - T_2(\xi, \tau)}{T_0 - T_{лик}}; \quad \xi = \frac{r}{R}; \quad l(\tau) = \frac{L(t)}{R}; \quad \tau = Fo = \frac{a_2 t}{R^2};$$

$Bi_1 = \frac{\alpha_{зав} R}{\lambda_1}$; $Ko = \frac{q_\phi K_\gamma}{c_1(T_\phi - T_c)}$ – число Коссовича (затвердевания); $По = \frac{q_\phi}{c_2(T_0 - T_{лик})}$ – число Постольника

(перегрева); $K_\gamma = \frac{\gamma_2}{\gamma_1}$; $K_\lambda = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$; $K_a = \frac{a_2}{a_1}$; $K_T = \frac{T_0 - T_{лик}}{T_\phi - T_c}$;

T_c , T_ϕ и $T_{лик}$ – температуры наружной среды, затвердевания (солидуса) и ликвидуса; K ; r – координата, отсчитываемая от внешней поверхности слитка, м; R – полутолщина пластины, или радиус цилиндра, шара, м; $L(t)$ – нарастающая толщина твердой корки слитка, м; t – время, ч; q_ϕ – скрытая теплота затвердевания, Дж/кг; $\alpha_{зав}$ – коэффициент теплообмена в зазоре между изложницей и слитком, Вт/(м²·К).

Схема расчета приведена на рис. 1.

Поскольку при такой постановке задачи конвективным перемешиванием расплава пренебрегаем, то функцию $\varphi(\xi)$ в выражении (3) находим как решение задачи теплопроводности с граничным условием III рода:

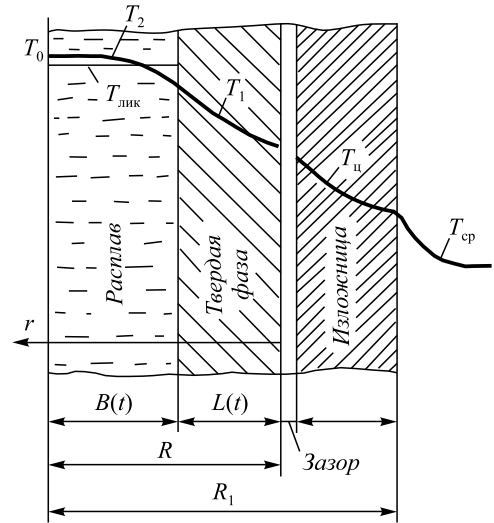


Рис. 1. Схема расчета затвердевания слитка

Fig. 1. Calculation algorithm of ingot solidification

$$\varphi(\xi) = 1 - \frac{Bi_n}{2K_T} [1 - (1 - \xi)^2],$$

где $Bi_n = \frac{\alpha_\Sigma^H R}{\lambda_1}$; α_Σ^H – коэффициент теплообмена (суммарный) со стороны наружной поверхности изложницы, Вт/(м²·К).

Решение уравнений (1) – (3) с использованием МЭИ имеет следующий вид.

Распределение температуры в затвердевающем слое слитка описывается выражением

$$\theta_1(\xi, \tau) = \theta_1^*(\xi, l) \left\{ 1 - \frac{V(l) [1 - \Phi(\xi, l) / \theta_1^*(\xi, l)]}{Ko [1 + \omega_1(l) + \omega_2(l)]} \right\}, \quad (4)$$

где

$$\theta_1^*(\xi, l) = \frac{(1-m) + Bi_1 [1 - (1-\xi)^{1-m}]}{(1-m) + Bi_1 [1 - (1-l)^{1-m}]};$$

$$\Phi(\xi, l) = \frac{2 + Bi_1 \xi (2 - \xi)}{2 + Bi_1 l(\tau) [2 - l(\tau)]};$$

$$V(l) = \frac{Ko \omega_1(l)}{\{1 + m [1 - l(\tau)]\} l(\tau)} \frac{1 + \frac{Bi_1 l(\tau) [1 - l(\tau)]}{2 [3 + Bi_1 l(\tau)]}}{1 + \frac{Bi_1 l(\tau) [1 - l(\tau)]}{2 + Bi_1 l(\tau)}};$$

$$\omega_1(l) = \left\langle 2(1-m) Bi_1 [3 + Bi_1 l(\tau)] \{1 + m [1 - l(\tau)]\} \times \right. \\ \left. \times [1 - l(\tau)]^{1-m} l(\tau) \right\rangle / \left\langle 3(1+m) Ko [2 + Bi_1 l(\tau)] \times \right. \\ \left. \times \{ (1-m) + Bi_1 - Bi_1 [1 - l(\tau)]^{1-m} \} \right\rangle;$$

$$\omega_2(l) = \frac{4 [1 - l(\tau)]}{3(1+m) По}.$$

Положение фронта кристаллизации $l(\tau)$ в момент времени τ определяется следующей зависимостью:

$$H_*(l)[1 + \beta_1(l) + \beta_2(l)] = \frac{\tau - \tau_\phi^0}{K_a Ko}, \quad (5)$$

где

$$H_*(l) = \frac{2 + Bi_1}{2(1+m)Bi_1} \times \left\{ 1 - \frac{2(1-m+Bi_1)[1-l(\tau)]^{1+m} - (1+m)Bi_1[1-l(\tau)]^2}{(1-m)(2+Bi_1)} \right\};$$

$$\begin{aligned} \beta_1(l) = & \left\{ 4[2m + (1+m)Bi_1] \right\} / \left\{ 3KoBi_1^2 \times \right. \\ & \times \left\{ 1 - \left(2(1-m+Bi_1)[1-l(\tau)]^{1+m} - (1+m)Bi_1 \times \right. \right. \\ & \times \left. \left. [1-l(\tau)]^2 \right) / (1-m)(2+Bi_1) \right\} \times \\ & \times \left\{ l(\tau) - \frac{2}{Bi_1} \ln \left[1 + \frac{Bi_1 l(\tau)}{2} \right] + \right. \\ & + \frac{Bi_1 l^2(\tau)}{12(2+Bi_1)[2m + (1+m)Bi_1]} \left\{ 6[(1+m)Bi_1^2 - \right. \\ & - (1+2m)Bi_1 - 2m] + 4Bi_1[m - (1+2m)Bi_1] \times \\ & \times \left. \left. l(\tau) + 3mBi_1^2 l^2(\tau) \right\} \right\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta_2(l) = & \left\{ 8 \left\{ (1-m)(3+Bi_1) - 3(1-m+Bi_1) \times \right. \right. \\ & \times \left. \left. [1-l(\tau)]^{2+m} + (2+m)Bi_1[1-l(\tau)]^3 \right\} \right\} / \\ & / \left\{ 9Po(2+m) \left\{ (1-m)(2+Bi_1) - 2(1-m+Bi_1) \times \right. \right. \\ & \times \left. \left. [1-l(\tau)]^{1+m} + (1+m)Bi_1[1-l(\tau)]^2 \right\} \right\}. \end{aligned}$$

Решение опорной задачи (1) – (3) в соответствии с обозначенной выше инженерной интерпретацией процесса переноса теплоты выполнено для схемы термического слоя (рис. 2). Исходя из этой модели, продолжительность полного затвердевания слитка находим из соотношения

$$\bar{\tau}_\phi = \tau_\phi - \tau_\phi^0 = \tau_\phi^*(1 + \bar{\beta}_1 + \bar{\beta}_2), \quad (6)$$

где

$$\tau_\phi^* = \frac{(2 + Bi_1)K_a Ko}{2(1+m)Bi_1};$$

$$\begin{aligned} \bar{\beta}_1 = & \frac{4}{3KoBi_1^2(2+Bi_1)} \left\{ [(1+m)Bi_1^2 + 2(1+2m)Bi_1 + \right. \\ & + 4m] \left[1 - \frac{2}{Bi_1} \ln \left(1 + \frac{Bi_1}{2} \right) \right] + \frac{Bi_1}{12} \times \right. \\ & \times \left. \left. [(2+m)Bi_1^2 - 2(3+4m)Bi_1 - 12m] \right\}; \end{aligned}$$

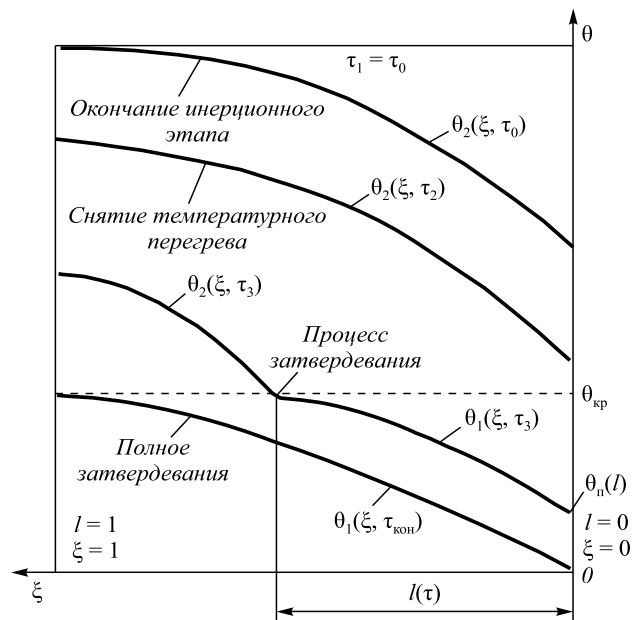


Рис. 2. Схема теплового пограничного слоя в процессе затвердевания металла с начальным перегревом:

τ_1 , τ_2 и τ_3 – время инерционного периода, снятия перегрева и кристаллизации

Fig. 2. Diagram of thermal boundary layer during initially overheated metal solidification:

τ_1 , τ_2 , and τ_3 – time of inertial period, overheat removal and crystallization

$$\bar{\beta}_2 = \frac{8(3 + Bi_1)}{9(2 + m)(2 + Bi_1)Po}.$$

Продолжительность τ_ϕ^0 охлаждения перегретого расплава до момента начала процесса кристаллизации рассчитывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \tau_\phi^0 = & \frac{1}{3(1+m)Bi_2} \left\{ \left(1 + \frac{Bi_2}{4} \right) - \frac{2 + 3Bi_2 + Bi_2^2}{Bi_2} \times \right. \\ & \times \ln \left(1 + \frac{Bi_2}{2} \right) + (3 + Bi_2) \ln(1 + K_T) \left. \right\}. \quad (7) \end{aligned}$$

Используя формулы из работы [17], получим

$$\varphi(\xi) = 1 - \frac{Bi_2}{2K_T} [1 - (1 - \xi)^2],$$

при этом

$$\tau_\phi^0 = \tau_0 + \frac{3 + Bi_2}{3(1+m)Bi_2} \left[\ln(1 + K_T) - \ln \left(1 + \frac{Bi_2}{2} \right) \right]; \quad (8)$$

здесь

$$\tau_0 = \frac{1}{12(1+m)} \left[1 + \frac{4}{Bi_2} - \frac{8}{Bi_2^2} \ln \left(1 + \frac{Bi_2}{2} \right) \right]. \quad (9)$$

Решение для определения изменения температур принимает следующий вид:

$$\theta_1(\xi, \tau) = \theta_1^*(\xi, \tau) - \frac{f_1(\tau)}{2(1+m)} \left\{ \left[(1-\xi)^2 - \frac{2+Bi_1}{Bi_1} \right] - \left[(1-\xi)^2 - \frac{2+Bi_1}{Bi_1} \right] \theta_1^*(\xi, \tau) \right\}; \quad (10)$$

$$\theta_2(\xi, \tau) = 1 - \frac{f_2(\tau)}{2(1+m)} \left\{ (1-\xi)^2 - [1-l(\tau)]^2 \right\}, \quad (11)$$

где

$$f_1(\tau) = \frac{2Bi_1 K_a [1-l(\tau)] [6+3Bi_1 l(\tau) - Bi_1 l^2(\tau)]}{3 \{ 2[1+Bi_1 l(\tau)] - Bi_1 l^2(\tau) \}^2} l(\tau); \quad (12)$$

$$f_2(\tau) = -\frac{4}{3} (1-\varphi_u) l(\tau). \quad (13)$$

Таким образом, получены решения температурного профиля по сечению слитка в различные моменты времени. Решения включают в себя зависимости толщины затвердевшей корки от времени, а также скорость затвердевания. Температурные поля зависят от критериального числа Bi , который характеризует теплообмен тела с окружающей средой, т.е. методика позволяет рассчитывать процессы затвердевания непрерывнолитых заготовок.

Динамика процесса кристаллизации определяется калориметрическим условием Стефана, подстановка в которое функций (10) – (13) приводит к дифференциальному уравнению [17]:

$$[F_1(l) + F_2(l) + F_3(l)] dl = dt, \quad (14)$$

где

$$F_1(l) = \frac{K_a K_o}{Bi_1} \frac{(1-m+Bi_1)[1-l(\tau)]^m - Bi_1[1-l(\tau)]}{1-m}; \quad (15)$$

$$F_2(l) = \frac{4K_\lambda K_T}{3(1+m)Bi_1} \frac{(1-\varphi_u)[1-l(\tau)]^{m+1} - Bi_1[1-l(\tau)]^2}{1-m}; \quad (16)$$

$$F_3(l) = \frac{2K_a[3+Bi_1 l(\tau)]}{3(1+m)[2+Bi_1 l(\tau)]} [1+m-ml(\tau)] l(\tau) [1-l(\tau)]. \quad (17)$$

Интегрирование полной формулы (14) привело к трансцендентному выражению [11]:

$$\begin{aligned} & \frac{K_a K_o (2+Bi_1)}{2(1+m)Bi_1} \times \\ & \times \left[1 - \frac{2(1-m+Bi_1)(1-l)^{1+m} - (1+m)Bi_1(1-l)^2}{(1-m)(2+Bi_1)} \right] + \\ & + \frac{4K_\lambda K_T (1-\varphi_u)(3+Bi_1)}{9(1+m)(2+m)Bi_1} \times \\ & \times \left[1 - \frac{3(1-m+Bi_1)(1-l)^{2+m} - (2+m)Bi_1(1-l)^3}{(1-m)(3+Bi_1)} \right] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + \frac{2K_a}{3(1+m)Bi_1^3} \left\{ \left[(1+m)Bi_1^2 + 2(1+2m)Bi_1 + 4m \right] \times \right. \\ & \times \left[l - \frac{2}{Bi_1} \ln \left(1 + \frac{Bi_1 l}{2} \right) \right] + \frac{Bi_1 l^3}{2} [(1+m)Bi_1^2 - \\ & - (1+2m)Bi_1 - 2m] + \frac{Bi_1^2 l^3}{3} \times \\ & \times \left[m - (1+2m)Bi_1 \right] + \frac{mBi_1^3 l^4}{4} \left. \right\} = \tau. \quad (18) \end{aligned}$$

Для определения положения $l(\tau)$ фронта кристаллизации в произвольный момент времени τ ($\tau_\phi^0 \leq \tau \leq \tau_\phi$) выражение (18) было представлено [11] в следующем виде:

$$H(l)[1+\beta_1(l)+\beta_2(l)]=\tau, \quad (19)$$

где

$$H(l) = \frac{(2+Bi_1)K_a K_o}{2(1+m)Bi_1} \times \left[1 - \frac{2(1-m+Bi_1)(1-l)^{1+m} - (1+m)Bi_1(1-l)^2}{(1-m)(2+Bi_1)} \right]; \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \beta_1(l) = & \left\{ 4[2m+(1+m)Bi_1] \right\} / \left\{ 3KoBi_1^2 \times \right. \\ & \times \left[1 - \frac{2(1-m+Bi_1)(1-l)^{1+m} - (1+m)Bi_1(1-l)^2}{(1-m)(2+Bi_1)} \right] \left. \right\} \times \\ & \times \left\{ \left[l - \frac{2}{Bi_1} \ln \left(1 + \frac{Bi_1 l}{2} \right) \right] + \right. \\ & + \frac{Bi_1 l^2}{12(2+Bi_1)[2m+(1+m)Bi_1]} \left\{ 6[(1+m)Bi_1^2 - \right. \\ & - (1+2m)Bi_1 - 2m] + 4Bi_1 \times \\ & \times [m - (1+2m)Bi_1] l + 3mBi_1^2 l^2 \left. \right\} \left. \right\}; \quad (21) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta_2(l) = & \left\{ 8[(1-m)(3+Bi_1) - 3(1-m+Bi_1) \times \right. \\ & \times (1-l)^{2+m} + (2+m)Bi_1(1-l)^3] \left. \right\} / \left\{ 9(2+m)Po \times \right. \\ & \times [(1-m)(2+Bi_1) - 2(1-m+Bi_1)(1-l)^{1+m} + \\ & + (1+m)Bi_1(1-l)^2] \left. \right\}. \quad (22) \end{aligned}$$

Уравнение (19) решено методом уточняющих приближений (метод касательных Ньютона) относительно положения фронта кристаллизации, причем толщина затвердевшей корки рассматривается как функция времени. В качестве приближенного значения корня уравнения используется его значение на предыдущей временной итерации, т.е. задаваясь временем, находим положение фронта кристаллизации.

Преимуществом разработанного метода расчета является то, что инженеры-практики, задаваясь вре-

менем и условиями теплообмена, могут определять положение фронта кристаллизации и температурные поля. Это позволяет исследовать закономерности затвердевания, например, непрерывнолитой заготовки в зависимости от скорости разливки и условий охлаждения.

Из формулы (19) следует, что физическая теплота, теряемая твердеющей оболочкой, учитывается составляющей $\beta_1(l)$ из уравнения (21), а наличие перегрева – величиной $\beta_2(l)$ из выражения (22).

При определении динамики продвижения фронта кристаллизации получаем уравнение

$$v_\phi = \dot{l}(\tau) = \frac{\dot{l}^*(\tau)}{1 + \omega_1(l) + \omega_2(l)}, \quad (23)$$

где

$$v_\phi^* = \dot{l}^*(l) = \frac{(1-m)Bi_1}{K_a Ko} \times \left[(1-m + Bi_1)(1-l)^m - Bi_1(1-l) \right]^{-1}, \quad (24)$$

$$\omega_1(l) = \frac{2(1-m)Bi_1(3 + Bi_1l)[1 + m(1-l)](1-l)^{1-m}l}{3(1+m)Ko(2 + Bi_1l)[(1-m) + Bi_1 - Bi_1(1-l)^{1-m}]}; \quad (25)$$

$$\omega_2(l) = \frac{4(1-l)}{3(1+m)Po}. \quad (26)$$

Уравнения (23) – (26) позволяют рассчитывать динамику перемешивания фронта кристаллизации по сечению заготовки и глубину жидкой лунки.

Тестирование аналитического решения по МЭИ с результатами эксперимента и численным интегрированием исходной задачи описано ниже.

При разработке либо усовершенствовании методов расчета режимов прикладных задач металлургической теплотехники и теплофизики за последние 30 лет, безусловно, применялся системный подход, когда для конкретного случая привлекались результаты промышленных экспериментов и численные методы решения нелинейных задач, а также результаты других исследований [10, 12, 14]. В конкретном случае поступили аналогично, используя известные решения (метод Л.С. Лейбензона), промышленные эксперименты, численное решение.

На первом этапе произведен расчет времени полного затвердевания блюмингового слитка массой 8 т [18] при следующих исходных данных: материал сталь 45; размеры слитка 0,734×0,655 м; толщина стенки изложницы 0,37 м; начальная температура расплава $T_0 = 1530$ °С; $T_{лик} = 1490$ °С; $T_{сол} = T_\phi = 1420$ °С; температура подогрева изложницы $T_n^0 = 150$ °С; $T_c = 30$ °С. Расчетное время $\tau_{затв}$ полного затвердевания слитка по методу Л.С. Лейбензона [13, 14] с учетом двухфазной модели составляет 2 ч 40 мин, по данным промышленных экспериментов имеем $\tau_{затв} = 2$ ч 45 мин.

На следующем этапе с помощью численного интегрирования показана пригодность к применению опорной краевой задачи (1) – (3) при использовании модели для симметричного охлаждения пластины.

В работе [19] рассмотрены численные схемы при решении нелинейных задач технологии нагрева. В соответствии с предложенными в этой работе рекомендациями применена численная схема, основанная на конечно-разностной аппроксимации с целью уточнения нагрева слитков в соответствии с выражениями (1) – (3). Для проверки адекватности моделей (1), (2) дополнительно выполнили сопоставление с результатами промышленного эксперимента [6] для слитка кипящей стали размерами 720×1560 мм при толщине стенки чугуной изложницы 0,29 м. Результаты сопоставления показывают некоторое расхождение – около 8,5 % (по данным промышленного эксперимента продолжительность полного затвердевания составляет 3 ч 25 мин, по данным расчета – 3 ч 45 мин). Это связано с тем, что после полного затвердевания слитка не было зафиксировано точное местоположение термопары в центральной плоскости слитка, т.е. за счет перемещения жидких слоев металла, ферростатического давления жидкой стали термопара может менять свое начальное положение, и время полного затвердевания в конкретном случае может незначительно колебаться.

В дальнейшем по аналогии с работой [15] выполнено сравнение результатов вычислений в соответствии с приведенными выше теплофизическими данными при охлаждении и затвердевании 8-т блюмингового слитка по МЭИ и методу численного интегрирования исходной краевой задачи (1), (2) по явной конечно-разностной схеме Дю-Фора и Франкела. Продолжительность затвердевания слитка, найденная в результате численного моделирования процесса, составляет 2 ч 41 мин и практически совпадает с решением по методу Л.С. Лейбензона. Расчетное время несколько меньше времени затвердевания в промышленном эксперименте (2 ч 45 мин) и обусловлено тем, что рассмотренная модель не учитывает расчет времени (примерно 4 – 5 мин) снятия теплоты перегрева стали.

Для оценки адекватности описания процессов затвердевания непрерывнолитых заготовок с помощью предложенной методики (8) – (26) было осуществлено сравнение результатов расчета математической модели затвердевания и охлаждения с экспериментальными данными, приведенными в работе [14]. Результаты расчетов показали, что относительная погрешность вычислений по приведенной методике для процессов непрерывной разливки при определении времени затвердевания не превышает 6 %, при вычислении температуры – 3,5 %.

Несмотря на некоторые упрощения в части постановки задачи (отсутствие двухфазной зоны, учета времени снятия перегрева, невозможность явного анализа влияния величины газового зазора [10, 12, 14], напри-

мер, толщины и материала изложницы на динамику температурных полей и др.), предлагаемые методики представляется возможным использовать в теплотехнических расчетах режимов затвердевания и охлаждения слитков и отливок при разливке в изложницы и в ходе непрерывного литья наряду с известными и более широко апробированными методами моделирования и вычислений [2, 5, 9, 13 и др.].

Выводы. Разработан метод расчета режима затвердевания слитка в изложнице. При этом в основу математического метода расчета положен метод эквивалентных источников МЭИ, введенный в практику вычислений нелинейных теплотехнических задач известным ученым-теплофизиком Ю.С. Постольником. Решение сформулированной нелинейной задачи теплопроводности выполнено в соответствии с классической схемой термического слоя для двух последовательных этапов внутреннего теплообмена: инерционного и регулярного. Апробация методики проведена в соответствии с результатами эксперимента для промышленных (слябовых и блюминговых) слитков и расчетами по методу Л.С. Лейбензона, а также численного интегрирования исходной краевой задачи по явной конечно-разностной аппроксимации.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Глинков М.А. Основы общей теории тепловой работы печей. – М.: Metallurgizdat, 1959. – 416 с.
2. Лейбензон Л.С. К вопросу о затвердевании земного шара из первоначального расплавленного состояния // Изв. АН СССР. Серия география и геофизика. 1936. № 6. С. 1133 – 1175.
3. Иванцов Г.П. Приближенный способ расчета кристаллизации слитка. – В кн.: Теплотехника слитка и печей: Сб. трудов ЦНИИЧМ. – М.: Metallurgizdat, 1960. Вып. 2 (5). С. 60 – 104.
4. Любов Б.Я. Вычисление скорости затвердевания металлического слитка // Доклады АН СССР. 1949. Т. 68. № 5. С. 847 – 850.
5. Вейник А.И. Теория затвердевания отливки. – М.: Машгиз, 1960. – 434 с.
6. Гольдфарб Э.М. Теплотехника металлургических процессов. – М.: Metallurgiya, 1967. – 439 с.
7. Самойлович Ю.А. Расчет затвердевания слитков. – В кн.: Металлургическая теплотехника: Сб. научных трудов ВНИИМТ. – Свердловск: Metallurgiya, 1965. Вып. 12. С. 14 – 137.
8. Ефимов В.А. Разливка и кристаллизация стали. – М.: Metallurgiya, 1976. – 552 с.
9. Самойлович Ю.А. Формирование слитка. – М.: Metallurgiya, 1977. – 160 с.
10. Рубинштейн Л.И. Проблема Стефана. – Рига: Звайгзне, 1967. – 453 с.
11. Тимошпольский В.И., Постольник Ю.С., Андрианов Д.Н. Теоретические основы теплофизики и термомеханики в металлургии. – Минск: Бел. наука, 2005. – 560 с.
12. Прикладные задачи металлургической теплофизики / В.И. Тимошпольский, Н.М. Беляев, А.А. Рядно и др. – Минск: Наука і тэхніка, 1991. – 320 с.
13. Самойлович Ю.А., Тимошпольский В.И. Расчеты затвердевания отливок цилиндрической формы по методу Лейбензона // Инженерно-физический журнал. 1987. Т. 52. № 3. С. 485 – 490.
14. Стальной слиток. В 3-х т. Т. 2. Затвердевание и охлаждение / Ю.А. Самойлович, В.И. Тимошпольский, И.А. Трусова, В.В. Филиппов. – Минск: Бел. наука, 2000. – 637 с.
15. Постольник Ю.С., Темкин С.И. Исследование процесса затвердевания плоской отливки // Изв. вуз. Машиностроение. 1976. № 5. С. 140, 141.
16. Постольник Ю.С., Темкин С.И. Приближенный расчет температурных полей в затвердевающем слое отливки // Изв. вуз. Черная металлургия. 1976. № 10. С. 20 – 24.
17. Постольник Ю.С. Приближенное исследование процесса симметричного затвердевания отливок при конвективном охлаждении // Изв. вуз. Черная металлургия. 1971. № 6. С. 155 – 160.
18. Тимошпольский В.И., Гурвич Э.А., Голубченко А.К. и др. Тепловое состояние слитка из среднеуглеродистой стали при его затвердевании и охлаждении // Металлургическая и горнорудная промышленность. 1987. № 3. С. 33, 34.
19. Перетягко В.Н., Темлянец Н.В., Темлянец М.В., Михайленко Ю.Е. Нагрев стальных слабов. – М.: Теплотехник, 2008. – 192 с.

Поступила 30 декабря 2014 г.

IZVESTIYA VUZOV. CHERNAYA METALLURGIYA = IZVESTIYA. FERROUS METALLURGY. 2015. VOL. 58. NO. 8, pp. 550–556.

ANALYTICAL CALCULATIONS OF SOLIDIFICATION AND COOLING PROCESSES IN LARGE- TONNAGE COMMERCIAL INGOTS. REPORT 1. MATHEMATICAL FORMULATION OF THE PROBLEM AND DERIVATION OF CORRELATIONS FOR A THERMAL LAYER SCHEME

Postol'nik Yu.S., Dr. Sci. (Eng.), Professor

Timoshpol'skii V.I.¹, Dr. Sci. (Eng.), Professor, Director of Science and New Equipment (tree-89@mail.ru)

Trusova I.A.², Dr. Sci. (Eng.), Professor, Head of the Chair of Metallurgical Technology

¹ CJSC PII SIT "NEFTEGAZSTROIZOLYATSIYA" (14, Marshala Grechko str., Kiev, 04136, Ukraine)

² Belarusian National Technical University (65, Nezavisimosti Ave., Minsk, 220013, Belarus)

Abstract. The technique to compute the overall time of bloom ingot solidification was developed. To solve the stated problem a method of equivalent sources (MES) by Yu.S. Postolnik was applied, which has proven its effectiveness for solving problems in the field of heat engineering. The solution has been achieved in terms of the thermal

layer format, for two successive stages of heat exchange, namely: – inertial and regular. The comparison of calculated data concerning a commercial bloom ingot, as derived by the MES method, with the results of experiments and those obtained by the L.S. Leybenzon method, has shown a reasonable correlation as to the time of complete solidification. Thus, the obtained solution is of value in heat-engineering computations of commercial ingot solidification conditions. The proposed technique can be useful in heat-engineering calculations as applied to solidification and cooling schedules for ingots and billets when poured into molds and in the process of continuous casting, to get an estimate of the time of complete freezing and of temperature patterns.

Keywords: solidification and cooling of ingot, mathematical modeling, heat conductivity non-linear problem, thermal layer pattern, equivalent sources method.

DOI: 10.17073/0368-0797-2015-8-550-556

REFERENCES

1. Glinkov M.A. *Osnovy obshchei teorii teplovoi raboty pechei* [Fundamentals of general theory of furnace thermal work]. Moscow: Metallurgizdat, 1959. 416 p. (In Russ.).
2. Leibenzon L.S. Earth globe solidification from the original melt state. *Izvestiya AN SSSR. Seriya geografiya i geofizika*. 1936, no. 6, pp. 1133–1175. (In Russ.).
3. Ivantsov G.P. Approximate method of calculation of ingot solidification. In.: *Teplotekhnika slitka i pechei: Sb. trudov TsNIChM* [Ingot and furnace heat technology: Proceedings of the All-Union Research and Development Institute of Metallurgical Heat Engineering]. Moscow: Metallurgizdat, 1960. Issue 2 (5), pp. 60–104. (In Russ.).
4. Lyubov B.Ya. Calculation of solidification rate of metal ingot. *Doklady AN SSSR*. 1949. Vol. 68, no. 5, pp. 847–850. (In Russ.).
5. Veinik A.I. *Teoriya zatverdevaniya otlivki* [Casting solidification theory]. Moscow: Mashgiz, 1960. 434 p. (In Russ.).
6. Gol'dfarb E.M. *Teplotekhnika metallurgicheskikh protsessov* [Heat engineering of metallurgical processes]. Moscow: Metallurgiya, 1967. 439 p. (In Russ.).
7. Samoilovich Yu.A. Calculation of ingot solidification. In.: *Metallurgicheskaya teplotekhnika: Sb. nauchnykh trudov VNIIMT* [Metallurgical heat engineering: Proceedings of the All-Union Research and Development Institute of Metallurgical Heat Engineering]. Sverdlovsk: Metallurgiya, 1965. Issue. 12, pp. 14–137. (In Russ.).
8. Efimov V.A. *Razlivka i kristallizatsiya stali* [Steel casting and crystallization]. Moscow: Metallurgiya, 1976. 552 p. (In Russ.).
9. Samoilovich Yu.A. *Formirovanie slitka* [Ingot forming]. Moscow: Metallurgiya, 1977. 160 p. (In Russ.).
10. Rubinshtein L.I. *Problema Stefana* [Stefan problem]. Riga: Zvaigzne, 1967. 453 p.
11. Timoshpol'skii V.I., Postol'nik Yu.S., Andrianov D.N. *Teoreticheskie osnovy teplofiziki i termomekhaniki v metallurgii* [Theoretical foundations of thermal physics and thermal mechanics in metallurgy]. Minsk: Bel. navuka, 2005. 560 p.
12. Timoshpol'skii V.I., Belyaev N.M., Ryadno A.A., Trusova I.A., Steblov A.B., Maslennikov A.V., Zavelion V.I., Gurvich E.A., Mandel N.L., Minosyan Ya.P. *Prikladnye zadachi metallurgicheskoi teplofiziki* [Applied problems in metallurgical thermophysics]. Minsk: Navuka i tekhnika, 1991. 320 p.
13. Samoilovich Yu.A., Timoshpol'skii V.I. Calculation of cylindrical casting solidification by the Leybenzon method. *Inzhenerno-fizicheskii zhurnal*. 1987. Vol. 52, no. 3, pp. 485–490. (In Russ.).
14. Samoilovich Yu.A., Timoshpol'skii V.I., Trusova I.A., Filippov V.V. *Stal'noi slitok: v 3-kh t. T. 2. Zatverdevanie i okhlazhdenie* [Steel ingot: in 3 vols. Vol. 2. Solidification and cooling]. Minsk: Bel. nauka, 2000. 637 p.
15. Postol'nik Yu.S., Temkin S.I. The research of flat cast solidification process. *Izvestiya vuzov. Mashinostroenie*. 1976, no. 5, pp. 140–141. (In Russ.).
16. Postol'nik Yu.S., Temkin S.I. Approximate calculation of temperature fields in a cast solidifying layer. *Izvestiya vuzov. Chernaya metallurgiya = Izvestiya. Ferrous Metallurgy*. 1976, no. 10, pp. 20–24. (In Russ.).
17. Postol'nik Yu.S. Analytical approximation of casting symmetrical solidification under cooling by convection. *Izvestiya vuzov. Chernaya metallurgiya = Izvestiya. Ferrous Metallurgy*. 1971, no. 6, pp. 155–160. (In Russ.).
18. Timoshpol'skii V.I., Gurvich E.A., Golubchenko A.K., Brodskii S.S., Dan'ko V.P. Temperature condition of the ingot of medium-carbon steel at its solidification and cooling. *Metallurgicheskaya i gornorudnaya promyshlennost'*. 1987, no. 3, pp. 33–34. (In Russ.).
19. Peretyat'ko V.N., Temlyantsev N.V., Temlyantsev M.V., Mikhailenko Yu.E. *Nagrev stal'nykh slyabov* [Steel slab heating]. Moscow: Teplotekhnika, 2008. 192 p. (In Russ.).

Acknowledgements. This work is dedicated to the following fact: 2015 is the year of the 90th anniversary of outstanding Soviet and Ukrainian scientist in the field of metallurgical thermal physics, heat engineering and thermal mechanics, Ph.D., Professor Yurii Stepanovich Postol'nik (1925–2007), whose name is immortalized in the theoretical work on the laser-STI nonlinear thermal conductivity and publications in well-known Soviet and Russian and international journals.

Received December 30, 2014