

УДК 621.77

## КОНТАКТНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ ПРИ ПЛАСТИЧЕСКОМ ТЕЧЕНИИ МЕТАЛЛА В КЛИНОВИДНОМ КАНАЛЕ

*Баранов Г.Л., д.т.н., профессор кафедры «Детали машин» (bargeleo@mail.ru)*

Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина  
(620002, Россия, Екатеринбург, ул. Мира, 19)

**Аннотация.** Схема плоской деформации идеального жестко-пластического материала при течении в клиновидном канале находит широкое применение для анализа напряженного состояния в процессах обработки металлов давлением. В работе впервые получены замкнутые аналитические решения задачи плоской деформации при пластическом течении металла в клиновидном канале для контактных напряжений, подчиняющихся закону трения Кулона. Установлены закономерности изменения контактных напряжений по длине зоны скольжения при различных направлениях сил трения на участках опережения и отставания очага деформации. Показано, что при достижении касательными контактными напряжениями предельных значений на границе зон скольжения и торможения нормальные контактные напряжения имеют максимум с обращением в нуль производной  $dp/dr$ . Это приводит к плавной стыковке эпюр касательных напряжений на указанной границе и к излому на эпюре нормальных напряжений. Выполнен анализ результатов полученных решений и их сравнение с известными данными. Установлено, что переход к приближенному условию пластичности, записанному в главных напряжениях, качественно меняет характер эпюр контактных напряжений в зоне скольжения и длину этой зоны. В качестве примера использования полученных решений рассмотрено напряженное состояние при прессовании полосы через клиновую матрицу.

**Ключевые слова:** плоская пластическая деформация, клиновидный канал, условия трения, контактные напряжения, прессование полосы.

**DOI:** 10.15825/0368-0797-2015-6-429-433

Схема плоской деформации идеального жестко-пластического материала при течении в клиновидном сходящемся канале находит широкое применение для исследования таких технологических процессов, как осадка клиновидных поковок, прокатка, прессование и волочение полосы [1 – 6]. Дифференциальные уравнения равновесия для этого случая в цилиндрической системе координат имеют вид:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{r\phi}}{r \partial \phi} + \frac{(\sigma_r - \sigma_\phi)}{r} = 0; \quad (1, a)$$

$$\frac{\partial \tau_{r\phi}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_\phi}{r \partial \phi} + \frac{2\tau_{r\phi}}{r} = 0, \quad (1, б)$$

где  $\sigma_r$  – радиальные напряжения;  $\sigma_\phi$  – меридиональные напряжения;  $\tau_{r\phi}$  – касательные напряжения.

Условие пластичности представим так:

$$\sigma_r - \sigma_\phi = 2\tau_s \sqrt{1 - \left( \frac{\tau_{r\phi}}{\tau_s} \right)^2}, \quad (2)$$

где  $\tau_s$  – предел текучести при чистом сдвиге.

Экспериментально установлено, что в общем случае на контактной поверхности очага деформации можно выделить зоны скольжения, торможения и застоя [1, 4]. В зоне скольжения зависимость между контактными касательными и нормальными напряжениями подчиняется закону трения Кулона. В зоне торможения касательные контактные напряжения

постоянны и равны  $\tau_s$ , в зоне застоя уменьшаются от максимального значения на границе зоны до нуля в нейтральном сечении полосы.

В настоящее время замкнутое решение системы уравнений (1) и (2) получено для зоны торможения [7]. Для расчета напряжений в зонах с переменными силами трения используют либо численные методы [8 – 9], либо приближенные решения, построенные на замене условия пластичности (2) условием пластичности в главных напряжениях  $\sigma_r - \sigma_\phi = 2\tau_s$ , как при решении двумерной задачи [10 – 13], так и при решении задачи инженерным методом [1, 14]. При волочении шероховатой полосы, а также при сравнительно небольших силах трения в процессах осадки, прессования, прокатки зона скольжения может занимать значительную часть длины очага деформации. В этом случае важно оценить погрешность, вносимую в расчет технологических нагрузок заменой точного условия пластичности приближенным.

Целью данной работы является получение замкнутого решения задачи плоской деформации в цилиндрических координатах для контактных напряжений, подчиняющихся закону трения Кулона, при использовании условия пластичности в форме (2), и на этой основе выполнение анализа напряженного состояния в зоне скольжения и уточнения технологических нагрузок.

Из анализа известных решений задачи плоской деформации следует, что для идеального жестко-пластического материала зависимость касательных напряже-

ний от угла  $\varphi$  близка к линейной [7, 12]. С учетом этого, принимая допущение о том, что касательные напряжения в зоне скольжения пропорциональны  $\varphi$ , представим их в следующем виде:

$$z = \frac{\tau_{r\varphi}}{\tau_s} = \pm \left( \frac{\varphi}{\alpha} \right) \sin \Phi, \quad (3)$$

где  $\alpha$  – половина угла клина;  $\Phi$  – функция, зависящая только от  $r$ .

Здесь и далее верхний знак относится к тонкому концу полосы, нижний – к толстому концу полосы. Используя терминологию процесса прокатки, условно будем считать, что тонкому концу полосы соответствует участок опережения, толстому – участок отставания.

Выразим  $\sigma_r$  из условия пластичности (2), подставим в уравнение (1, а) и выполним преобразования:

$$r \frac{\partial \sigma_\varphi}{\tau_s \partial r} + 2r \frac{\partial \sqrt{1-z^2}}{\partial r} + 2\sqrt{1-z^2} \pm \frac{\sin \Phi}{\alpha} = 0. \quad (4)$$

Введем следующее обозначение для относительных контактных напряжений  $z_k = z$  при  $\varphi = \alpha$ . Связь между контактными напряжениями в зоне скольжения на основании закона трения Кулона имеет вид:

$$z_k = fp, \quad (5)$$

где  $f$  – коэффициент трения,  $p = -\sigma_\varphi / \tau_s$ .

Подставляя в уравнение (4)  $\varphi = \alpha$ ,  $z = z_k = \sin \Phi$ , с учетом (5) получим после преобразований следующее дифференциальное уравнение для определения  $\Phi$ :

$$r \frac{d\Phi}{dr} (\cos \Phi + 2f \sin \Phi) = \frac{f(2\alpha \cos \Phi \pm \sin \Phi)}{\alpha}. \quad (6)$$

Решение уравнения (6) представим в виде:

$$\ln \left( \frac{h_r}{h_g} \right) = \frac{\pm (a_1 \ln |\sin \Phi \pm 2\alpha \cos \Phi| + a_2 \Phi + C_1)}{\delta}, \quad (7)$$

где  $h_r = 2rs \sin \alpha$  – текущая толщина полосы;  $h_g$  – толщина торца  $g$ , на котором заданы граничные условия;  $a_1 = \frac{1 \pm 4f\alpha}{1 + 4\alpha^2}$ ;  $a_2 = \frac{2(f \pm \alpha)}{1 + 4\alpha^2}$ ;  $\delta = f/\alpha$ ;  $C_1$  – произвольная постоянная.

Величину  $C_1$  найдем из граничного условия  $\Phi = \Phi_0$  при  $h_r = h_g$ :

$$C_1 = -a_1 \ln |\sin \Phi_0 \pm 2\alpha \cos \Phi_0| - a_2 \Phi_0.$$

Для определения  $\Phi_0$  условие равновесия на поверхности торца  $g$  представим в интегральном виде [15]:

$$\sigma_0 = \frac{1}{\alpha} \int_{\alpha}^{\alpha} \sigma_r d\varphi, \quad (8)$$

где  $\sigma_0$  – среднее радиальное напряжение на торце  $g$ .

Выразим  $\sigma_r$  из условия пластичности (2):

$$\sigma_r = \sigma_\varphi + 2\tau_s \sqrt{1-z^2}. \quad (9)$$

Как следует из уравнения (1, б), при принятом допущении о линейном распределении касательных напряжений по координате  $\varphi$  нормальные напряжения  $\sigma_\varphi$  в произвольном сечении с координатой  $r$  равны

$$\sigma_\varphi = - \int_0^{\alpha} \left( 2\tau_{r\varphi} + r \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial r} \right) d\varphi = \tau_s \left( C_2 - \frac{0,5u\varphi^2}{\alpha} \right), \quad (10)$$

где  $C_2$  – произвольная постоянная;  $u = 2\sin \Phi + r(d\Phi/dr) \times \cos \Phi$ .

Выразим из уравнения (6) производную  $d\Phi/dr$ :

$$\frac{d\Phi}{dr} = \frac{\delta(2\alpha \pm \text{tg}\Phi)}{r(1 + 2f\text{tg}\Phi)}. \quad (11)$$

Для определения  $C_2$  примем  $\Phi = \Phi_0$  при  $h_r = h_g$ , подставим  $\sigma_r$  из (9) в (8) и с учетом (10) и (11) и выполним преобразования:

$$C_2 = q_0 \pm \frac{u_0 \alpha}{6} - \cos \Phi_0 - \frac{\Phi_0}{\sin \Phi_0},$$

где  $q_0 = \sigma_0 / \tau_s$ ,  $u_0 = u$  при  $h_r = h_g$ .

Подставим  $C_2$  в уравнение (10) с заменой  $\varphi$  на  $\alpha$ , учитывая, что  $\sigma_\varphi = -\tau_s \frac{\sin \Phi_0}{f}$  при  $h_r = h_g$ . В результате преобразований получим трансцендентное уравнение для определения  $\Phi_0$ :

$$\frac{\sin \Phi_0}{f} - \cos \Phi_0 - \frac{\Phi_0}{\sin \Phi_0} - K_\alpha u_0 \alpha + q_0 = 0, \quad (12)$$

где  $K_\alpha = 0,333$  для участка опережения,  $K_\alpha = -0,333$  для участка отставания.

Для удобства использования уравнения (12) перейдем от параметра  $\Phi_0$  к относительному нормальному давлению  $p_0$  на торце полосы, используя формулу  $p_0 = \frac{\sin \Phi_0}{f}$ . Из анализа результатов расчета  $p_0$ , выполненного для практически важного частного случая  $q_0 = 0$ , следует (рис. 1), что с ростом  $f$  и снижением  $\alpha$  величина  $p_0$  уменьшается, причем для участка опережения  $p_0$  несколько больше, чем для участка отставания. Однако при  $\alpha \leq 7,5^\circ$  указанное различие не превышает 1%. Максимальное возможное значение коэффициента трения  $f_{\max} = \frac{2}{\pi \pm 1,33\alpha - q_0}$  достигается при  $\Phi_0 = 0,5\pi$  и соответствует обращению в нуль ширины зоны скольжения. Зависимость  $p_0$  от  $f$  при  $\alpha \leq 7,5^\circ$  с погрешностью менее 1% аппроксимируется следующим выражением:

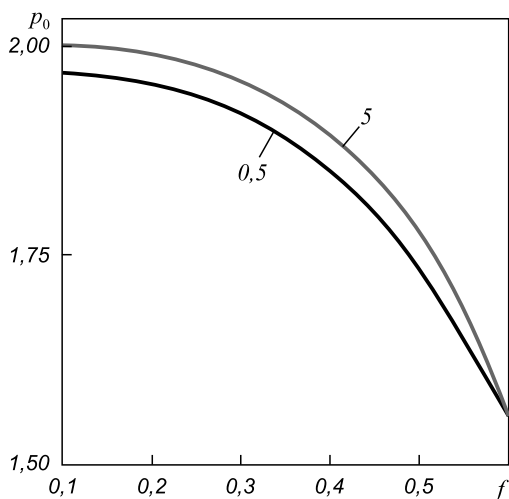


Рис. 1. Зависимость относительного нормального давления  $p_0$  от коэффициента трения (цифры у кривых соответствуют значению угла  $\alpha$  в градусах)

Fig. 1. Dependence of the normal pressure  $p_0$  from the coefficient of friction (numbers on the curves correspond to the value of the angle  $\alpha$  in degrees)

$$p_0 = (2 - 1,22f^{2,3})(1 + 0,2\alpha). \quad (13)$$

Относительная толщина полосы на границе зон скольжения и торможения определяется по уравнению (7) из условия  $z_k = 1$  или эквивалентного ему условия  $\Phi = 0,5\pi$ :

$$\lambda = \exp\left(\frac{0,5\pi a_2 + C_1}{\delta}\right), \quad (14)$$

где  $\lambda = h_{rm}/h_1$  – для участка опережения;  $\lambda = h_0/h_{rm}$  – для участка отставания;  $h_1$  – толщина узкого торца;  $h_0$  – толщина широкого торца.

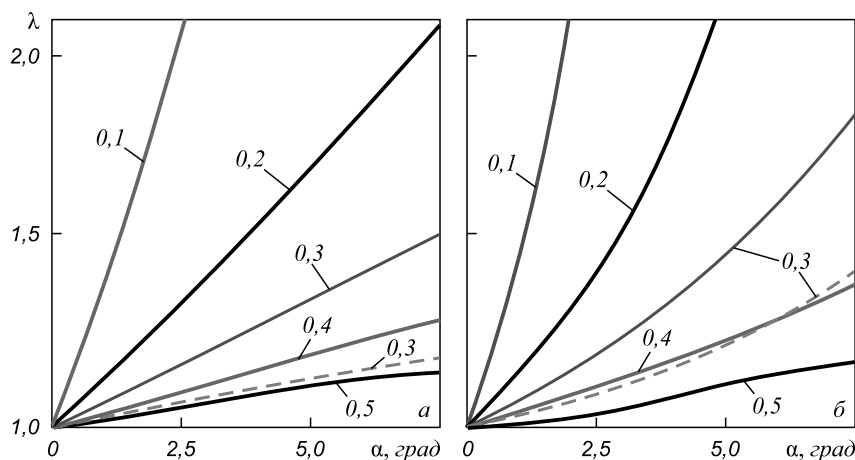


Рис. 2. Влияние угла  $\alpha$  на относительную длину зоны скольжения  $\lambda$ :  $a$  – для участка опережения;  $b$  – для участка отставания (цифры у кривых соответствуют значению коэффициента трения; сплошные линии рассчитаны по формуле (14), штриховые получены инженерным методом)

Fig. 2. Dependence of the length of sliding zone  $\lambda$  on the angle  $\alpha$ :  $a$  – for the zone of forward creep;  $b$  – for the zone of backward creep; (numbers at the curves correspond to the value of the coefficient of friction, the solid lines are calculated using the formula (14), dashed – by the engineering method)

Параметр  $\lambda$  характеризует максимально возможную длину зоны скольжения, которая для участка опережения равна

$$L_1 = 0,5h_1(\lambda - 1)\text{ctg}\alpha. \quad (15)$$

Для участка отставания –  $L_2 = 0,5h_0\left(\frac{\lambda - 1}{\lambda}\right)\text{ctg}\alpha$ .

Анализ результатов расчета  $\lambda$ , представленный на рис. 2, показал, что  $\lambda$  растет с увеличением угла  $\alpha$  и уменьшением коэффициента трения  $f$ . Значения  $\lambda$  для участка опережения (рис. 2,  $a$ ) меньше, чем для участка отставания (рис. 2,  $b$ ). Указанная разница растет с увеличением угла  $\alpha$  и с уменьшением коэффициента трения. Установлено, что при  $f < 0,35$  с ростом угла  $\alpha$  в диапазоне от 0 до  $7,5^\circ$  длина зоны скольжения  $L_1$  увеличивается, а при  $f > 0,35$  уменьшается. При  $0,25 \geq f \geq 0,45$  и  $\alpha \leq 7,5^\circ$  влиянием угла  $\alpha$  на  $L_1$  можно пренебречь, аппроксимируя зависимость  $L_1$  от  $f$  с погрешностью не более 4 % следующим выражением:

$$\frac{L_1}{h_1} = 3,5 - 5,3\sqrt{f - 0,2}.$$

Из сравнения результатов расчета  $\lambda$ , полученных при  $f = 0,3$  по разработанной методике и инженерным методом [1] (штриховые линии на рис. 2), следует, что использование приближенного условия пластичности приводит к уменьшению  $\lambda$  и на основании формулы (15) к существенному (в 2 – 3 раза) сокращению длины зоны скольжения.

В качестве примера использования разработанной методики выполнили анализ напряженного состояния металла в зоне скольжения при прессовании в условиях плоской деформации ( $q_0 = 0, f = 0,25$ ). Поскольку в этом

случае металл течет в сторону тонкого торца полосы, то для анализа применили уравнения, полученные для участка опережения, используя обозначение  $\lambda_1 = h_r/h_1$ . Как следует из рис. 3, контактные напряжения имеют минимальное значение на выходе из матрицы, монотонно увеличиваются по длине зоны скольжения и достигают экстремума с обращением в нуль производной  $d_p/d_r$  в конце этой зоны. В результате на границе зон скольжения и торможения участки эпюры касательных напряжений стыкуются плавно, а эпюра контактных напряжений имеет излом. Зависимость радиальных напряжений от  $\lambda_1$  близка к линейной на контактной поверхности (рис. 4, кривая 1). На оси симметрии полосы в соответствии с условием пластичности (2) имеем  $\sigma_r = \sigma_\phi + 2\tau_s$  (рис. 4, кривая 3). На рис. 4 приведена кривая 2 зависимости среднего по сечению радиального напряжения  $\sigma_{r,ср}$  от  $\lambda_1$ . При расчете  $\sigma_{r,ср}$  использовали выражение (8). Разность ординат кривых 1 и 3 на рис. 4, характеризующая неравномерность распределения радиальных напряжений в сечении с координатой  $\lambda_1$ , растет с увеличением  $\lambda_1$ , достигая максимального значения на границе зон скольжения и торможения.

Сопоставление значений  $\sigma_{r,ср}$ , полученных для случая  $\alpha = 5^\circ, f = 0,25$  по предложенной методике и рассчитанных инженерным методом (рис. 4, кривая 4) показало, что использование приближенного условия пластичности, записанного в главных напряжениях, приводит к значительному увеличению  $\sigma_{r,ср}$  и пропорционального ему усилия прессования. Так в рассмотренном примере при  $\lambda_1 = 1,45$  напряжение  $\sigma_{r,ср}$ , рассчитанное инженерным методом, в два раза больше, чем напряжение, полученное по формуле (8). Указанное различие объясняется тем, что при использовании инженерного метода расчетная длина зоны скольжения

существенно уменьшается (в рассмотренном примере в 2,1 раза) и зона торможения занимает большую часть длины очага деформации. Это, в свою очередь, приводит к увеличению суммарной силы контактного трения и усилия прессования.

**Выводы.** Анализ напряженного состояния и технологических нагрузок для многих процессов пластической деформации металлов базируется на решении задачи плоской деформации при течении металла в клиновидном сходящемся канале. Экспериментально установлено, что на контактной поверхности очага деформации имеются зоны скольжения, в которых касательные напряжения изменяются по закону Кулона. Для этих зон с использованием допущения о линейном распределении касательных напряжений по углу  $\phi$  клиновидного канала впервые получены замкнутые аналитические решения задачи плоской пластической деформации. Установлены закономерности изменения контактных напряжений по длине зон скольжения при различных направлениях сил трения на участках опережения и отставания очага деформации. Показано, что при равенстве касательных контактных напряжений предельным значениям на границе зон скольжения и торможения нормальные контактные напряжения достигают экстремума с обращением в нуль производной  $dp/dr$ . Это приводит к плавной стыковке эпюр касательных напряжений на указанной границе и к излому на эпюре нормальных напряжений. Получены зависимости для определения длины зоны скольжения. Показано, что при  $\alpha \leq 7,5^\circ$  и  $0,25 \geq f \geq 0,45$  эта длина на участке опережения практически не зависит от  $\alpha$ . На примере пресс-

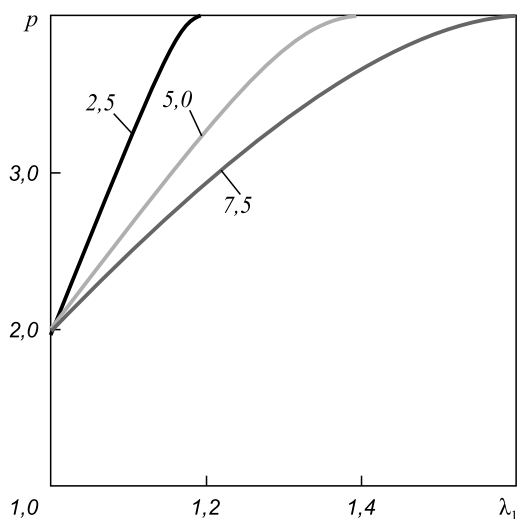


Рис. 3. Распределение нормальных контактных напряжений  $p$  в зоне скольжения при  $f = 0,25$  (цифры у кривых соответствуют значению угла  $\alpha$  в градусах)

Fig. 3. Normal-stress distribution at the contact surface  $p$  of the sliding zone when  $f = 0,25$  with the values of  $\alpha$  (deg) given on the curves

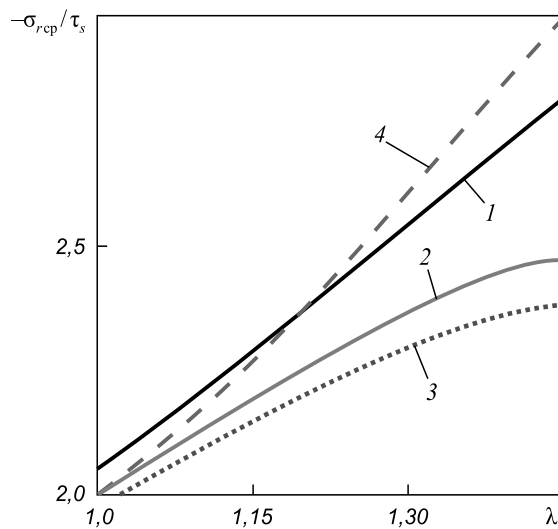


Рис. 4. Характер распределения радиальных напряжений по длине зоны скольжения при  $\alpha = 5^\circ, f = 0,25$ :

1 – на контактной поверхности, 2 – усредненных по сечению, 3 – на оси симметрии полосы, 4 – рассчитанных инженерным методом

Fig. 4. Radial-stress distribution over sliding zone when  $\alpha = 5^\circ, f = 0,25$ : 1 – at the contact surface, 2 – averaged over the cross section, 3 – on the axis of symmetry of the strip, 4 – calculated by engineering method

сования полосы из идеального жестко-пластического материала выполнено сопоставление полученных результатов с известными решениями. Установлено, что использование приближенного условия пластичности, записанного в главных напряжениях, при развитой зоне скольжения приводит к существенному увеличению расчетных значений технологических нагрузок.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Унксов Е.П. Инженерная теория пластичности. – М.: Mashgiz, 1959. – 328 с.
2. Черкасова И.Н. Силовые параметры осадки клиновидных тел // Изв. вуз. Машиностроение. 1985. № 4. С.116 – 120.
3. Грудев А.П. Теория прокатки. – М.: Интермет Инжиниринг, 2001. – 280 с.
4. Никитин Г.С. Теория непрерывной продольной прокатки. – М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2009. – 399 с.
5. Marciniak Z., Duncan J.L., Hu S.J. Mechanics of Sheet Metal Forming. – Oxford: Butterworth-Heinemann, 2002. – 228 p.
6. Перлин И.Л., Райтбарг Л.Х. Теория прессования металлов. – М.: Металлургия, 1975. – 446 с.
7. Теория пластических деформаций металлов. /Е.П. Унксов, У. Джонсон, В.Л. Колмогоров и др. – М.: Машиностроение, 1983. – 598 с.
8. Соколовский В.В. Теория пластичности. – М.: Высшая школа, 1969. – 608 с.
9. Максимов С.Б. Течение материала в сходящихся каналах при выполнении на контакте закона трения Кулона // Изв. вуз. Черная металлургия. 1990. № 1. С. 43 – 45.
10. Смирнов В.С. Теория обработки металлов давлением. – М.: Металлургия, 1973. – 496 с.
11. Дильман В. Л., Носачева А.И. Анализ напряженно-деформированного состояния неоднородной пластической полосы // Вестник Южно-Уральского государственного университета. 2012. № 34. С. 11 – 15.
12. Баранов Г.Л. Влияние контактного трения на напряженное состояние полосы при волочении // Сталь. 2014. № 6. С. 74 – 78.
13. Воронцов А.Л., Хациев Ю. Х. Анализ задач об осадке, волочении и прессовании полосы // Справочник. Инженерный журнал с приложением. 2014. № 59. С. 10 – 16.
14. Николаев В.А. Оценка методов расчета нормальных напряжений при прокатке полос // Производство проката. 2013. № 9. С. 20 – 25.
15. Малинин Н.Н. Технологические задачи пластичности и ползучести. – М.: Высшая школа, 1979. – 119 с.

Поступила 9 сентября 2014 г.

IZVESTIYA VUZOV. CHERNAYA METALLURGIYA = IZVESTIYA. FERROUS METALLURGY. 2015. Vol. 58. No. 6, pp. 429–433.

#### CONTACT STRESSES AT PLASTIC METAL FLOW IN A WEDGE-SHAPED CHANNEL

**Baranov G.L.,** *Dr. Sci. (Eng.), Professor of the Chair “Machinery parts”* (bargeleo@mail.ru)

**Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yeltsin** (19, Mira str., Ekaterinburg, 620002, Russia)

**Abstract.** The scheme of plane deformation of an ideal rigid-plastic material in the flow in a wedge-shaped channel is widely used for analysis of the stress state in metal forming processes. For the first time it was obtained a closed analytical solution of plane deformation during plastic flow of metal in a wedge-shaped channel for contact stresses, obeying the Coulomb law of friction. The regularities of changes of contact stress along the length of the section of the sliding were determined at different directions of the friction forces in the lead and lag zones. It is shown that when the tangential contact stresses reach to limit values on the boundary zones of the slip, the deceleration of the normal contact stresses reaches to maximum value of zero derivative  $dp/dr$ . This leads to the smooth docking plots of the tangential stress on that boundary and to the kink in the plot of the normal stress. It was established from the analysis results of the obtained solutions and their comparison with known data that the transition to the approximate plasticity condition qualitatively changes the character of the plots of the contact stresses in the zone of sliding and the length of this zone. As an example of the use of the obtained solutions the stress state was considered during the strip pressing through wedged matrix.

**Keywords:** flat plastic deformation, wedge-shaped channel, friction conditions, contact stress, strip extrusion.

DOI: 10.15825/0368-0797-2015-6-429-433

#### REFERENCES

1. Унксов Е.П. *Inzhenernaya teoriya plastichnosti* [Engineering theory of plasticity]. Moscow: Mashgiz, 1959, 328 p. (In Russ.).
2. Cherkasova I.N. Power parameters of the wedge-shaped bodies. *Izv. vuz. Mashinostroenie*. 1985, no. 4, pp. 116–120. (In Russ.).
3. Grudev A.P. *Teoriya prokatki* [Theory of rolling]. Moscow: Intermet Inzhiniring, 2001, 280 p. (In Russ.).
4. Nikitin G.S. *Teoriya nepreryvnoi prodol'noi prokatki* [Theory of continuous lengthwise rolling]. Moscow: Izd-vo MG TU im. N.E. Bauman, 2009. 399 p. (In Russ.).
5. Marciniak Z., Duncan J.L., Hu S.J. *Mechanics of Sheet Metal Forming*. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2002. 228 p.
6. Perlin I.L., Raitbarg L.Kh. *Teoriya pressovaniya metallov* [Theory of metals pressing]. Moscow: Metallurgiya, 1975. 446 p. (In Russ.).
7. Unksov E.P., Johnson W., Kolmogorov V.L. etc. *Teoriya plasticheskikh deformatsii metallov* [Theory of plastic deformation of metals]. Moscow: Mashinostroenie, 1983, 598 p. (In Russ.).
8. Sokolovskii V.V. *Teoriya plastichnosti* [Theory of plasticity]. Moscow: Vysshaya shkola, 1969, 608 p. (In Russ.).
9. Maksimov S.B. The material flow in converging channels when running on contact friction Coulomb's law. *Izvestiya VUZov. Chernaya metallurgiya = Izvestiya. Ferrous Metallurgy*. 1990, no. 1, pp. 43–45. (In Russ.).
10. Smirnov V.S. *Teoriya obrabotki metallov davleniem* [Theory of metal forming]. Moscow: Metallurgiya, 1973, 496 p. (In Russ.).
11. Dil'man V.L., Nosacheva A.I. The analysis of stress-strain state of inhomogeneous plastic strip. *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta*. 2012, no. 34, pp. 11–15. (In Russ.).
12. Baranov G.L. Influence of contact friction on the stress state of strip in drawing. *Steel in Translation*. 2014, vol. 44, no. 6, pp. 460–465.
13. Vorontsov A.L., Khatsiev Yu.Kh. The analysis of problems of upsetting, drawing and pressing of a strip. *Spravochnik. Inzhenernyi zhurnal s prilozheniem*. 2014, no. 59, pp. 10–16. (In Russ.).
14. Nikolaev V.A. The analysis of problems of upsetting, drawing and pressing of a strip. *Proizvodstvo prokata*. 2013, no. 9, pp. 20–25. (In Russ.).
15. Malinin N.N. *Tekhnologicheskie zadachi plastichnosti i polzuchesti* [Technological problems of plasticity and creep]. Moscow: Vysshaya shkola, 1979. 119. (In Russ.).

Received September 9, 2014