

УДК 621.77.01

АНАЛИЗ КОНТАКТНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В ЗОНЕ ОЧАГА ПЛАСТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ СО ЗНАКОПЕРЕМЕННЫМИ СИЛАМИ ТРЕНИЯ

Баранов Г.Л., д.т.н., профессор кафедры «Детали машин» (bargeleo@mail.ru)

Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б. Н. Ельцина
(620002, Россия, Екатеринбург, ул. Мира, 19)

Аннотация. С использованием линейного распределения касательных напряжений в зоне очага пластической деформации со знакопеременными силами трения и условия пластичности Мизеса получены зависимости для определения нормальных напряжений на контактной поверхности при осадке прямоугольной и клиновидной полосы, а также при прокатке полосы. Выполнено сопоставление полученных результатов с известными решениями. Показано, что использование приближенного условия пластичности, записанного в главных напряжениях, приводит к существенному уменьшению расчетных значений технологических нагрузок.

Ключевые слова: осадка и прокатка полосы, очаг деформации, зона застоя, контактные напряжения, технологические нагрузки.

Известно, что на контактной поверхности очага деформации при осадке и прокатке полосы имеется нейтральное сечение, в котором происходит изменение направления сил трения [1 – 3]. Изменение величины и направления сил трения происходит не скачкообразно, а в пределах зоны, называемой зоной застоя, ширина которой пропорциональна средней толщине полосы в этой зоне: $L_3 = Kh_{cp}$ [1, 2]. Коэффициент K при горячей прокатке лежит в диапазоне 0,5 – 2,0 и растет в указанных пределах с увеличением коэффициента трения f . При осадке полосы в работах [1, 4] этот коэффициент принят $K = 2$. В случае короткого очага деформации, ширина которого соизмерима с L_3 , зона застоя может занимать всю контактную поверхность очага деформации, либо большую ее часть. В этом случае технологическая нагрузка процесса в значительной мере будет определяться характером распределения контактных напряжений в зоне застоя [5].

При достаточной длине прямоугольной полосы анализ напряжений в процессе ее осадки сводится к решению задачи плоской деформации. Дифференциальные уравнения равновесия в прямоугольной системе координат имеют вид:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} = 0; \quad (1a)$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau}{\partial x} = 0. \quad (1б)$$

Условие пластичности для идеального жестко-пластического материала:

$$\sigma_x - \sigma_y = 2\tau_s \sqrt{1 - \left(\frac{\tau}{\tau_s}\right)^2}, \quad (2)$$

где τ_s – предел текучести при чистом сдвиге.

Точные решения системы уравнений (1) с условием (2) для участков с переменными силами трения в настоящий момент отсутствуют. При определении контактных напряжений в зоне застоя широко применяется инженерный метод [1], суть которого заключается в том, что из двух уравнений равновесия рассматривают только уравнение (1a). Для его решения используют допущение о линейной зависимости касательных напряжений τ от координат x и y и приближенное условие пластичности в главных напряжениях $\sigma_x - \sigma_y = 2\tau_s$. Обоснованность допущений о характере изменения касательных напряжений по координате x подтверждается экспериментально [1], по координате y согласуется с решением Прандтля, полученным для участка с постоянными силами трения [6]. В настоящее время отсутствует оценка погрешности, вносимой в решение плоской задачи для контактных напряжений использованием приближенного условия пластичности. Такая оценка особенно важна для зоны застоя, в пределах которой на сравнительно небольшой длине касательные напряжения могут изменяться от 0 до $\pm\tau_s$. При этом существенно изменяется не только разность нормальных напряжений от $2\tau_s$ до 0 в соответствии с условием пластичности (2), но и производная от этой разности от 0 до бесконечности.

Целью данной работы является получение замкнутого решения уравнения (1a) совместно с условием пластичности (2) для контактных напряжений в зоне застоя и на этой основе уточнение зависимостей для определения технологических нагрузок в процессах осадки и прокатки полосы из идеального жестко-пластического материала.

Начало координат совместим с осью симметрии полосы. Зависимость касательных напряжений от координат x и y запишем в виде

$$z = \frac{\tau}{\tau_s} = -z_k \frac{y}{h},$$

где h – половина толщины полосы; $z_k = \frac{qx}{Kh}$ – относительные контактные касательные напряжения; q – значение z_k на границе зоны застоя при $x = Kh$.

Введем следующее обозначение для относительных контактных нормальных напряжений: $p = -\sigma_y/\tau_s$ при $y = h$. В соответствии с уравнением (1а) продифференцируем τ по y , выразим σ_x через σ_y из условия пластичности (2) и с учетом принятых обозначений при $y = h$ получим после преобразований выражение для определения контактных нормальных напряжений:

$$p = 2\sqrt{1-z_k^2} - \frac{0,5Kz_k^2}{q} + C_1, \quad (3)$$

где $C_1 = p_0 - 2\sqrt{1-q^2} + 0,5Kq$ – произвольная постоянная, определяемая из следующего условия на границе зоны застоя: $p = p_0$ при $x = x_k = Kh$ и $z_k = q$.

Производная dp/dx от выражения (3) обращается в нуль на оси симметрии полосы при $x = 0$. В этой точке эпюры относительные контактные напряжения достигают максимального значения:

$$p_{\max} = p_0 + 2(1 - \sqrt{1-q^2}) + 0,5Kq. \quad (4)$$

Среднее контактное нормальное напряжение в зоне застоя определяется следующим интегралом:

$$p_{\text{ср}} = \left(\frac{1}{x_k} \right) \int_0^{x_k} p dx = \frac{\arcsin q}{q} - \sqrt{1-q^2} + \frac{Kq}{3} + p_0,$$

где $x_k = Kh$.

При использовании приближенного условия пластичности в главных напряжениях первый член в выражении (3) пропадает. Зависимость для p_{\max} в этом случае представим в виде: $p_{\max 1} = p_0 + 0,5Kq^2$.

Из сравнения полученных значений p_{\max} и $p_{\max 1}$ следует, что разница между ними растет с ростом q и K . Принимая в соответствии с работой [1] $q = 1$; $K = 2$, получим $p_{\max} = p_0 + 3$; $p_{\max 1} = p_0 + 1$; $p_{\text{ср}} = p_0 + 2,237$. При использовании приближенного условия пластичности $p_{\text{ср}1} = p_0 + 0,667$. Таким образом, для рассматриваемого варианта замена точного условия пластичности (2) приближенным приводит к уменьшению приращения максимального контактного напряжения в зоне застоя в три раза, а приращения среднего напряжения в 3,35 раза. Очевидно, что наибольшее влияние на величину технологической нагрузки при осадке полосы будет оказывать характер распределения контактных напряжений в зоне застоя при равенстве ширины полосы L_3 . В этом случае, принимая для рассмотренного выше примера $p_0 = 2$, различие в результатах расчета

усилия осадки при использовании точного и приближенного условий пластичности оценим коэффициентом

$$K_{\text{п}} = \frac{p_{\text{ср}}}{p_{\text{ср}1}} = \frac{p_0 + 2,237}{p_0 + 0,667} = 1,59.$$

Рассмотрим особенности расчета контактных напряжений в зоне застоя при осадке клиновидной полосы. К этой же задаче сводится случай прокатки полосы с незначительным уширением при замене дуги контакта между валками и полосой в зоне застоя хордой. Для удобства вычислений заменим Декартову систему координат цилиндрической, в которой уравнение равновесия (1а) приобретает вид:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{r\phi}}{r \partial \phi} + \frac{\sigma_r - \sigma_\phi}{r} = 0, \quad (5)$$

где σ_r – радиальные напряжения; σ_ϕ – меридиональные напряжения, $\tau_{r\phi}$ – касательные напряжения.

Условие пластичности (2) запишем в виде следующего выражения:

$$\sigma_r - \sigma_\phi = 2\tau_s \sqrt{1 - \left(\frac{\tau_{r\phi}}{\tau_s} \right)^2}. \quad (6)$$

Используем терминологию процесса прокатки, считая, что тонкому концу клина соответствует участок опережения, толстому концу – участок отставания. Выразим L_3 и $h_{\text{ср}}$ через граничные толщины полосы в зоне застоя:

$$L_3 = 0,5(h_2 - h_1) \text{ctg} \alpha; \quad h_{\text{ср}} = 0,5(h_2 + h_1),$$

где h_1 и h_2 – начальная (со стороны тонкого конца клина) и конечная (со стороны толстого конца клина) толщина полосы в зоне застоя; α – половина угла клиновидной полости.

Подставим L_3 и $h_{\text{ср}}$ в формулу $L_3 = Kh_{\text{ср}}$ и определим после преобразований вытяжку в зоне застоя (здесь и далее уширением полосы пренебрегаем):

$$\lambda_c = \frac{h_2}{h_1} = \frac{1 + K \text{tg} \alpha}{1 - K \text{tg} \alpha}.$$

Согласно работам [6, 7] примем, что касательные напряжения в зоне застоя линейно зависят от координат ϕ и x :

$$z = \frac{\tau_{r\phi}}{\tau_s} = \frac{\phi}{\alpha} (a - bx), \quad (7)$$

где $x = h_x/h_1$; h_x – текущая толщина полосы в зоне застоя; a и b – коэффициенты, определяемые значениями контактных касательных напряжений на границах этой зоны.

Относительные контактные касательные напряжения обозначим

$$z_k = \frac{\tau_{r\alpha}}{\tau_s} = a - bx, \quad (8)$$

где $\tau_{r\alpha} = \tau_{r\phi}$ при $\phi = \alpha$.

Примем, что $\tau_{r\alpha} = q\tau_s$ при $h_x = h_1$ и $\tau_{r\alpha} = -q\tau_s$ при $h_x = h_2$. При наличии зоны торможения на участке опережения $q = 1$, при ее отсутствии $q = fp_k$, где p_k – относительное контактное давление на границе зон скольжения и застоя; f – коэффициент трения на контактной поверхности. На основании принятых обозначений для определения a и b запишем систему уравнений $a - b = q$ и $a - \lambda_c b = -q$, решая которую, найдем:

$$b = \frac{2q}{\lambda_c - 1}; \quad a = q + b.$$

Выразим σ_r из условия пластичности (6), подставим в уравнение (5) и, учитывая (7) и (8), выполним преобразования:

$$r \frac{\partial \sigma_\phi}{\tau_s \partial r} + 2r \frac{\partial \sqrt{1-z^2}}{\partial r} + 2\sqrt{1-z^2} + \frac{z_k}{\alpha} = 0. \quad (9)$$

Заменим в этом уравнении переменные r на x , учитывая их линейную зависимость, примем обозначения $z = z_k = \sin \Phi$, $\sigma_\phi = -\tau_s p$ и запишем после преобразований:

$$p = 4 \cos \Phi - 2a\Phi + \frac{a \ln x - bx}{\alpha} + 4\sqrt{a^2 - 1} \times \arctg \left(\frac{a \operatorname{tg} 0,5\Phi - 1}{\sqrt{a^2 - 1}} \right) + C, \quad (10)$$

где C – произвольная постоянная, определяемая из граничного условия $p = p_1$ при $x = 1$.

Эпюра контактных нормальных напряжений в зоне застоя, построенная по уравнению (10), имеет куполообразную форму (рис. 1), максимум эпюры p смещен от нейтрального сечения на расстояние δ в направлении толстого конца клина. Максимальное приращение контактного нормального напряжения в пределах зоны застоя, обозначенное $p_m = p_{\max} - p_1$, соответствует сечению полосы, расположенному на расстоянии x_m от начала зоны застоя с толщиной $h_m = h_1 x_m$. Используя выражение (8), выразим x_m через контактные касательные напряжения в рассматриваемом сечении, принимая обозначение $\Phi_m = \arcsin z_k$, $x_m = h_1(a - \sin \Phi_m)/b$. Контактные напряжения в конце зоны застоя (на участке отставания) больше, чем в начале зоны на величину $\Delta p = p_2 - p_1$.

Дифференцируя (10) по x и приравняв к нулю производную, получим трансцендентное уравнение для определения параметра Φ_m :

$$\alpha [\cos \Phi_m + (a - \sin \Phi_m) \operatorname{tg} \Phi_m] + 0,5 \sin \Phi_m = 0. \quad (11)$$

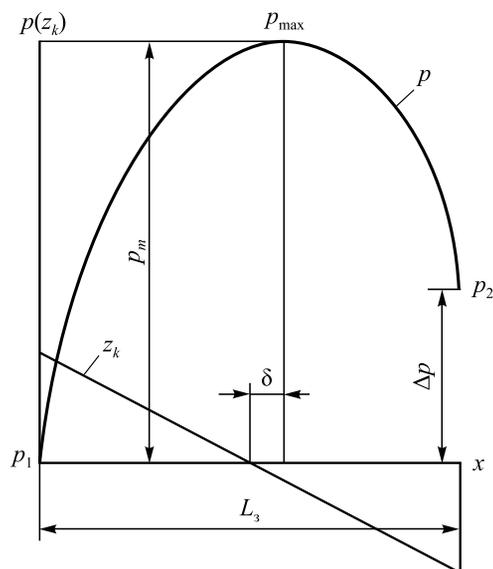


Рис. 1. Эпюры контактных касательных (z_k) и нормальных (p) напряжений в зоне застоя

Fig. 1. Curves of contact tangential (z_k) and normal (p) stresses in the stagnation zone

Величину δ выразим через толщину нейтрального сечения h_n :

$$\delta = 0,5(h_m - h_n) \operatorname{ctg} \alpha = \frac{0,5Kh_n}{q} \sin |\Phi_m|. \quad (12)$$

Принимая для малых α следующие допущения: $\sin \Phi_m \approx \Phi_m$, $\operatorname{tg} \alpha \approx \alpha$, получим приближенное решение уравнения (11): $\Phi_m \approx -2\alpha/(1 + 2a\alpha)$ и преобразуем формулу (12) к более удобному для практического применения виду:

$$\delta = \frac{h_n \alpha K^2}{q(K + 2q)}.$$

Как следует из рис. 2, в рассмотренном диапазоне параметров ($K = 1...2$, $\alpha = 0...10^\circ$) при $q = 1$ величина p_m меняется в пределах от 2,5 до 4, увеличиваясь с ростом K и α . Уменьшение q приводит к снижению p_m (рис. 3).

Порядок определения Δp рассмотрим для важного частного случая очага деформации, имеющего зоны торможения. В этом случае $q = 1$ и в начале зоны застоя запишем $x = 1$, $\Phi = 0,5\pi$; в конце зоны застоя – $x = \lambda_c$, $\Phi = -0,5\pi$. Подставляя граничные значения в формулу (10), последовательно определим p_1 , p_2 и, выполнив преобразования, получим:

$$\Delta p = 2\pi(a - \sqrt{a^2 - 1}) + \frac{a \ln \lambda_c - 2}{\alpha}. \quad (13)$$

С погрешность не более 4 % при $\alpha \leq 10^\circ$ зависимость (13) аппроксимируется выражением $\Delta p = K(\pi + 0,7K)\alpha$.

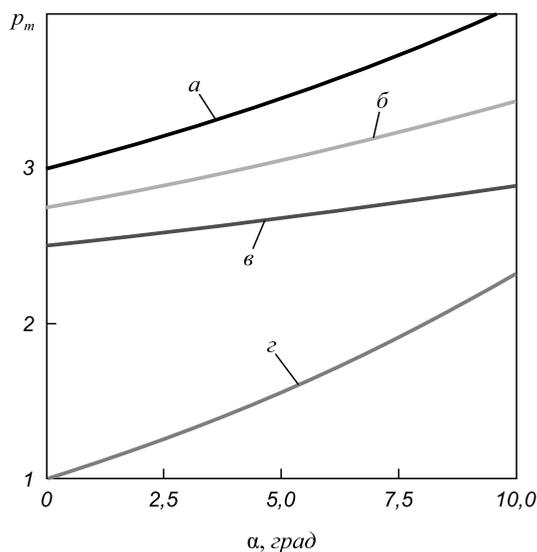


Рис. 2. Влияние угла α и ширины зоны застоя на максимальное приращение нормального контактного напряжения в этой зоне: кривые $a - в$ получены по предложенной методике для различных значений K ($a - K = 2$; $б - K = 1$; $в - K = 0,5$); кривая $г$ получена инженерным методом при $K = 2$

Fig. 2. The influence of the angle α and the width of the stagnation zone at maximum normal contact voltage increment in this area: curves $a - в$ were obtained by the proposed method for various values of K ($a - K = 2$; $б - K = 1$; $в - K = 0,5$); curve $г$ was obtained by engineering method with $K = 2$

Как показывают расчеты, изменение q оказывает незначительное влияние на величину Δp .

Для сравнения результатов, полученных предложенным и инженерным методами, представим решение уравнения (5) при использовании условия пластичности в главных напряжениях и граничном условии $p = p_1$ при $x = 1$ в следующем виде:

$$p = \left(2 + \frac{a}{\alpha}\right) \ln x - \frac{b(x-1)}{\alpha} + p_1. \quad (14)$$

Продифференцировав выражение (14) по x и найдя значение x_m , при котором $dp/dx = 0$, подставим его в (14) и получим после преобразований:

$$p_m = \left(2 + \frac{a}{\alpha}\right) \left[\ln(a + 2\alpha) - \ln b - 1 \right] + \frac{b}{\alpha}. \quad (15)$$

Сопоставление результатов расчета p_m при $K = 2$ и $q = 1$ по предложенной методике (рис. 2, кривая a) и по формуле (15) (рис. 2, кривая $г$) позволило установить, что использование приближенного условия пластичности приводит к снижению p_m в 2–3 раза. Большие отличия соответствуют меньшим углам α . Принимая длину очага деформации равной L_3 и $p_0 = 2$, определили, что с ростом угла α различие в результатах расчета усилия осадки при использовании точного и приближенного условий пластичности, определяемое коэффи-

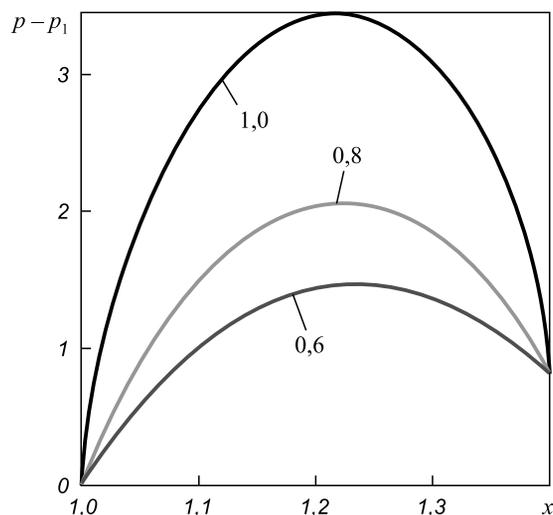


Рис. 3. Влияние параметра q на форму эпюры контактных нормальных напряжений в зоне застоя при $K = 2$, $\alpha = 5^\circ$ (цифры у кривых соответствуют значению q)

Fig. 3. The influence of parameter q on the shape of the curve of normal contact stresses in the stagnation zone at $K = 2$, $\alpha = 5^\circ$ (figures on the curves correspond to the value of q)

циентом K_n , уменьшается. Так при $\alpha = 0$ $K_n = 1,59$, при $\alpha = 5^\circ$ $K_n = 1,47$.

Выводы. С использованием линейного распределения касательных напряжений в зоне очага пластической деформации со знакопеременными силами трения и условия пластичности Мизеса получены зависимости для определения нормальных напряжений на контактной поверхности при осадке прямоугольной и клиновидной полосы, а также при прокатке полосы. Выполнено сопоставление полученных результатов с известными решениями. Показано, что использование приближенного условия пластичности, записанного в главных напряжениях, приводит к существенному уменьшению расчетных значений технологических нагрузок.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Унков Е. П. Инженерная теория пластичности. –М.: Машгиз, 1959. – 328 с.
2. Целиков А. И., Никитин Г. С., Рокотян С. Е. Теория прокатки. –М.: Металлургия, 1980. – 320 с.
3. Грудев А.П. Теория прокатки. –М.: Интермет Инжиниринг, 2001. – 280 с.
4. Малинин Н. Н. Технологические задачи пластичности и ползучести. –М.: Высшая школа, 1979. – 119 с.
5. Гарбер Э.А., Кожевникова И.А., Тарасов П.А. Расчет усилий горячей прокатки тонких полос с учетом напряженно-деформированного состояния в зоне прилипания очага деформации // Производство проката. 2007. № 4. С. 7 – 15.
6. Унков Е.П., Джонсон У., Колмогоров В.Л. и др. Теория пластических деформаций металлов. –М.: Машиностроение, 1983. – 598 с.
7. Баранов Г.Л. Влияние контактного трения на напряженное состояние полосы при волочении // Сталь. 2014. № 6. С. 74 – 78.

Поступила 27 октября 2014 г.

ANALYSIS OF THE CONTACT STRESSES IN THE ZONE OF PLASTIC DEFORMATION WITH SIGN-VARIABLE FRICTION FORCES

Baranov G.L., Dr. Sci. (Eng.), Professor of the Chair “Machine parts” (bargeleo@mail.ru)

Ural Federal University named after the first President of Russia
B.N. Yeltsin (19, Mira str., Ekaterinburg 620002 Russia)

Abstract. The dependences for determination of normal tension on a contact surface at a deposit of a rectangular and wedge-shaped strip and during the strip rolling were carried out with the use of linear distribution of tangent tension in the zone of plastic deformation with sign-variable friction forces and conditions of plasticity of Mises. Comparison of the received results was executed to the known decisions. It was shown that the use of approximate condition of plasticity, which was written down in the main tensions, led to essential reduction of the calculated values of technological loadings.

Keywords: upsetting and strip rolling, deformation zone, area of stagnation, contact stresses, technological loadings.

REFERENCES

1. Unksov E.P. *Inzhenernaya teoriya plastichnosti* [Engineering theory of plasticity]. Moscow: Mashgiz, 1959. 328 p. (In Russ.)
2. Tselikov A.I., Nikitin G.S., Rokotyay S.E. *Teoriya prokatki* [Rolling Theory]. Moscow: Metallurgiya, 1980. 320 p. (In Russ.)
3. Grudev A.P. *Teoriya prokatki* [Rolling Theory]. Moscow: Intermet Inzhiniring, 2001. 280 p. (In Russ.)
4. Malinin N.N. *Tekhnologicheskie zadachi plastichnosti i polzuchesti* [Technological challenges of plasticity and creep]. Moscow: Vysshaya shkola, 1979. 119 p. (In Russ.)
5. Garber E.A., Kozhevnikova I.A., Tarasov P.A. Calculation of efforts of thin strips hot rolling with the stress-strain state in the area of adhesion of the deformation zone. *Proizvodstvo prokata*. 2007, no. 4, pp. 7–15. (In Russ.)
6. Unksov E.P., Johnson W., Kolmogorov V.L. etc. *Teoriya plasticheskikh deformatsii metallov* [Theory of plastic deformation of metals]. Moscow: Mashinostroenie, 1983. 598 p. (In Russ.)
7. Baranov G.L. The influence of contact friction on the stress state of the strip at drawing. *Stal'*. 2014, no. 6, pp. 74–78. (In Russ.)

Received October 27, 2014