

В.А. Трусов, М.Б. Зинкевич, И.С. Новожилов

Национальный исследовательский технологический университет «МИСиС»

МЕТОД РАСЧЕТА ТЕМПЕРАТУРНОГО РЕЖИМА ПРИ СОРТОВОЙ ПРОКАТКЕ

Развитие сортопрокатного производства направлено на повышение производительности и качественных показателей профилей, в процессе изготовления которых могут применяться различные виды термомеханического упрочнения.

Расчет температурного режима прокатки и последодеформационного охлаждения произведен с использованием компьютерной информационной системы [1], основанной на математической модели, позволяющей рассчитывать температурные поля по сечению металла.

Температурная модель в настоящей работе основана на применении метода контрольного объема (МКО), основой которого является численный подход к решению дифференциальных уравнений в полных и частных производных. Это позволяет просто и быстро получать удовлетворительную точность результатов [2, 3].

Использование МКО для вычислений распределения температуры в областях с криволинейными границами требует решения о выборе способа представления контура и, соответственно, способа аппроксимации условий теплообмена на границе. Простейший способ связан с заменой криволинейной границы дискретной границей сетки. Принадлежащие области узлы сетки делятся на внутренние и граничные. Чтобы однозначно определить, является ли узел внутренним или граничным, необходимо иметь набор коэффициентов линей-

ных и квадратичных уравнений, описывающих границы каждого калибра.

Все типы калибров в компьютерной информационной системе объединены в две глобальные группы: калибры первого порядка (рис. 1, а, в), границы которых описываются уравнениями первого порядка (линейными функциями) и группа калибров второго порядка (рис. 1, б) с границами, определяемыми кривыми первого и второго порядков (линейными и квадратичными функциями).

Для определения коэффициентов уравнений, описывающих границу калибров простой геометрической формы обоих типов (см. рис. 1, а, б) и двухручьевого калибра сложной геометрической формы (рис. 1, в), необходимым и достаточным условием является наличие информации о расположении пяти точек: $(X_1; Y_1)$, $(X_2; Y_2)$, $(X_{MH}; Y_{MH})$, $(X_4; Y_4)$ и $(X_3; Y_3)$. При известном межвалковом зазоре s , ширине b_k и мнимой высоте h_{MH} калибра и ширине дна b_d для калибров простой геометрической формы (см. рис. 1, а, б) эти точки могут быть однозначно выражены. При многониточной прокатке вводятся дополнительные параметры, такие как l_{II} и h_{II} – ширина и осевая высота перемычки.

Если у кривой первого порядка известны координаты двух различных точек $(X_A; Y_A)$, $(X_B; Y_B)$, то коэффициенты линейного уравнения $y = kx + p$ могут быть найдены из зависимостей, приведенных в таблице.

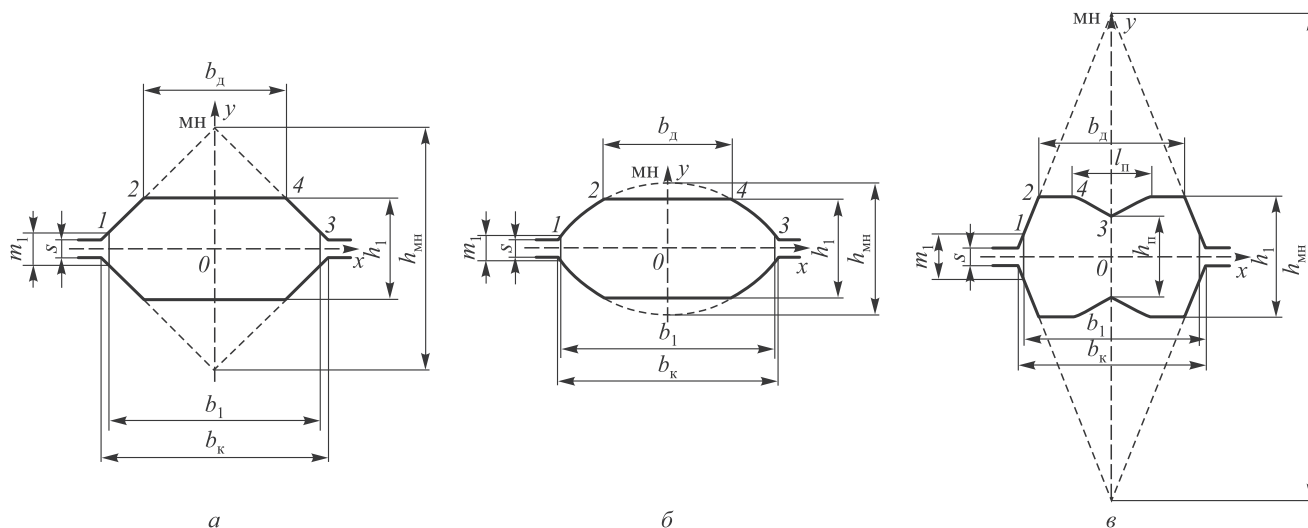


Рис. 1. Калибры первого (а, в) и второго (б) порядка

Коэффициенты уравнений первого и второго порядков, описывающих границу калибров различной геометрической формы

Первый порядок	Второй порядок
$k_{A,B} = \frac{Y_B - Y_A}{X_B - X_A}$	$a_{A,B,C} = \frac{Y_C - \frac{X_C(Y_B - Y_A) + X_B Y_A - X_A Y_B}{X_B - X_A}}{X_C(X_C - X_A - X_B) + X_A X_B}$
$p_{A,B} = \frac{X_B Y_A - X_A Y_B}{X_B - X_A}$	$b_{A,B,C} = \frac{Y_B - Y_A}{X_B - X_A} - a(X_A + X_B)$
-	$c_{A,B,C} = \frac{X_B Y_A - X_A Y_B}{X_B - X_A} + a X_A X_B$

Для кривой второго порядка необходимым и достаточным является наличие известных координат трех различных точек $(X_A; Y_A)$, $(X_B; Y_B)$, $(X_C; Y_C)$. Коэффициенты квадратичного уравнения $y = ax^2 + bx + c$ могут быть найдены из равенств, приведенных в таблице.

Имея набор коэффициентов линейных и квадратичных уравнений, описывающих границы каждого калибра, можно создать температурную модель с краевыми условиями, приведенную на рис. 2, а [4].

Температурное поле как в очаге деформации, так и в межклетевом промежутке находится решением дифференциальных уравнений в частных производных, являющихся математическим описанием закона сохранения энергии. Обозначив две пространственные переменные через декартовы координаты x , y и время через t , можем записать уравнение теплопроводности в виде [5]

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right), \quad (1)$$

где T – температура; c – теплоемкость; ρ – плотность; k – коэффициент теплопроводности.

Численное решение уравнения (1) представляет собой набор значений температуры по сечению металла в узлах решетки, приведенной на рис. 2, а, где h_b и h_{cp} – коэффициенты теплоотдачи валкам и окружающей среде; T_b и T_{cp} – температура валков и окружающей среды (в дальнейших рассуждениях обозначается как T_∞).

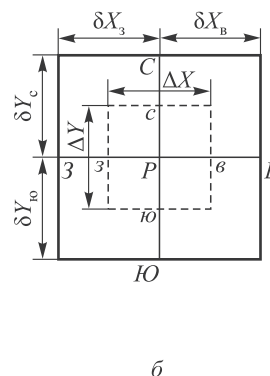
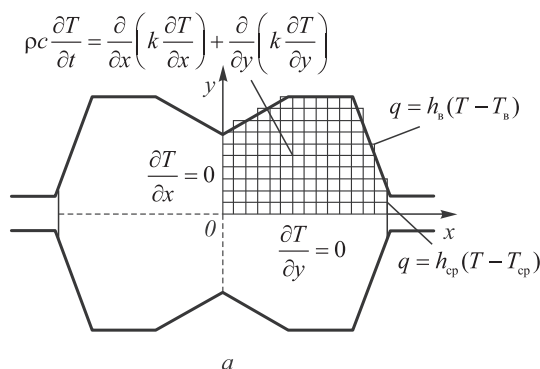


Рис. 2. Дискретная область с граничными условиями (а) и контрольный объем (область, ограниченная пунктирной линией) (б)

Расчетная область разбивается на некоторое число непересекающихся контрольных объемов ($\Delta z = 1$) таким образом, что каждая узловая точка содержится в одном (см. рис. 2, б). Дифференциальное уравнение интегрируется по каждому объему. В результате находится дискретный аналог дифференциального уравнения, в который входят значения T в нескольких узловых точках.

Поскольку время является однонаправленной координатой, то для численного решения уравнения (1) необходимо определить значения температуры для времени $t + \Delta t$, передвигаясь по времени от заданного начального распределения T в узловых точках для времени t .

Интегрируя левую часть уравнения (1) по контрольному объему (см. рис. 2, б) и по временному интервалу от t до $t + \Delta t$, получаем

$$\rho c \int_{\text{ю з}} \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial T}{\partial t} dt dx dy = \rho c \Delta y \Delta x (T_p^1 - T_p^0), \quad (2)$$

где верхние индексы 1 и 0 означают соответственно новые (неизвестные) и старые (заданные) значения температуры в узле P .

После интегрирования правой части уравнения (1) имеем

$$\begin{aligned} & \int_t^{t+\Delta t} \int_{\text{ю з}} \int_{\text{з}} \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) dx dy dt = \\ & = \int_t^{t+\Delta t} \left[\left(\frac{k_b(T_b - T_p)}{(\delta x)_b} - \frac{k_3(T_p - T_3)}{(\delta x)_3} \right) \Delta y + \right. \\ & \left. + \left(\frac{k_c(T_c - T_p)}{(\delta y)_c} - \frac{k_{10}(T_p - T_{10})}{(\delta y)_{10}} \right) \Delta x \right] dt. \end{aligned} \quad (3)$$

Подставляя верхние индексы в уравнение (3), получаем

$$\begin{aligned} & \left[\left(\frac{k_b(T_b^1 - T_p^1)}{(\delta x)_b} - \frac{k_3(T_p^1 - T_3^1)}{(\delta x)_3} \right) \Delta y + \right. \\ & \left. + \left(\frac{k_c(T_c^1 - T_p^1)}{(\delta y)_c} - \frac{k_{10}(T_p^1 - T_{10}^1)}{(\delta y)_{10}} \right) \Delta x \right] \Delta t. \end{aligned} \quad (4)$$

Теперь имеются все составляющие, необходимые для получения дискретного аналога, отвечающего общему дифференциальному уравнению нестационарной двумерной теплопроводности:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} = 0, \quad (5)$$

где q_x и q_y – тепловые потоки, найденные следующим образом:

$$q_x = -k \frac{\partial T}{\partial x}, \quad q_y = -k \frac{\partial T}{\partial y}. \quad (6)$$

Интегрируя уравнение (5) по контрольному объему, приведенному на рис. 2, б, имеем

$$\frac{[(\rho c)_P T_P - (\rho c)_P^0 T_P^0] \Delta x \Delta y}{\Delta t} + q_3 - q_B + q_{ю} - q_C = 0. \quad (7)$$

Значения q_B , q_3 , q_C , и $q_{ю}$ являются проинтегрированными по границам контрольного объема суммарными потоками, т.е. $q_B = \int q_x dy$ для грани в и т.д.

Двумерный дискретный аналог можно записать в следующем виде:

$$a_P T_P = a_B T_B + a_3 T_3 + a_C T_C + a_{ю} T_{ю} + b, \quad (8)$$

где

$$a_B = \frac{k \Delta y}{\delta x}; \quad a_3 = \frac{k \Delta y}{\delta x}; \quad a_C = \frac{k \Delta x}{\delta y}; \quad a_{ю} = \frac{k \Delta x}{\delta y};$$

$$b = a_P^0 T_P^0; \quad a_P^0 = \frac{(\rho c)_P \Delta x \Delta y}{\Delta t};$$

$$a_P = a_B + a_3 + a_C + a_{ю} + a_P^0. \quad (9)$$

Если плотность теплового потока в точке P_2 (q_{P_2}) в направлении, параллельном оси x через границу (см. рис. 3) определяется как линейная функция от температуры на границе (T_{P_2}), можно записать следующее уравнение, являющееся граничным условием:

$$q_{P_2} = f_C + f_P T_{P_2}, \quad (10)$$

где f_C и f_P – коэффициенты линейного выражения.

Подобное граничное условие возникает, когда заданы коэффициент теплоотдачи на границе (h) (см. рис. 2, а) и температура окружающей среды (T_∞). Тогда, при отводе теплоты с поверхности металла:

$$q_{P_2} = h(T_\infty - T_{P_2}), \quad (11)$$

следовательно, можно записать $f_C = h T_\infty$ и $f_P = -h$.

Когда плотность теплового потока в направлении, параллельном оси x (см. рис. 3) через границу задана уравнением (10), дискретный аналог с краевыми усло-

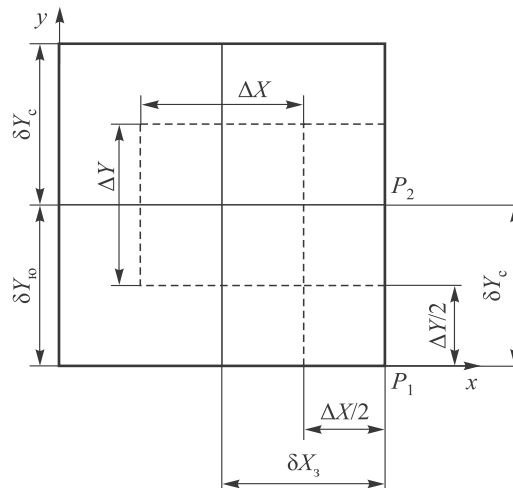


Рис. 3. К описанию граничных условий при решении нестационарной двумерной температурной задачи

виями теплообмена можно выразить как

$$a_{P_2} T_{P_2} = a_3 T_3 + d, \quad (12)$$

где

$$d = a_C T_C^* + a_{ю} T_{ю}^* + b;$$

$$b = a_P^0 T_P^0 + f_C; \quad (13)$$

$$a_{P_2} = a_3 + a_C + a_{ю} + a_P^0 - f_P.$$

Параметры a_3 , a_C , $a_{ю}$, a_P^0 определяются из формулы (9), a_B не существует для точки P_2 (см. рис. 3).

Здесь T^* обозначает оценочное значение переменной температуры, которое обсуждается ниже, Δx для точек P_1 и P_2 – половина контрольного объема, Δy – половина контрольного объема для каждого узла на оси x , при этом значения $a_{ю}$ для точки P_1 не существует (см. рис. 3).

Определив коэффициенты a_P , a_B , a_3 , a_C , $a_{ю}$, a_P^0 и d для каждой узловой точки, решается система уравнений относительно T в узлах решетки, используя метод прогонки или Tri-Diagonal-Matrix-Algorithm (TDMA) [2, 5].

Имея узловые точки с номерами 1, 2, 3, ..., N , дискретный аналог можно записать в следующем виде:

$$a_i T_i = b_i T_{i+1} + c_i T_{i-1} + d_i, \quad (14)$$

где $i = 1, 2, 3, \dots, N$. Номера 1 и N относятся к точкам на границе.

Таким образом, температура T_i связана с соседними значениями T_{i-1} и T_{i+1} . Для узловых точек на границе $c_1 = 0$ и $b_N = 0$, следовательно температуры T_0 и T_{N+1} не будут иметь смысла.

Приведенные условия означают, что T_1 выражается через T_2 , а T_2 через T_3 , и процесс подстановки продолжается до тех пор, пока значение T_N не будет выражено через T_{N+1} . Поскольку T_{N+1} не существует, в

действительности на данном этапе получено численное значение T_N . Это позволяет начать процесс обратной подстановки, в котором T_{N-1} получится из T_N , T_{N-2} – из T_{N-1} , ..., T_2 – из T_3 и T_1 – из T_2 .

При прямой подстановке имеем

$$T_i = P_i T_{i+1} + Q_i \quad (15)$$

после того, как получено

$$T_{i-1} = P_{i-1} T_i + Q_{i-1}. \quad (16)$$

Подставляя (16) в (14), получаем следующее соотношение:

$$a_i T_i = b_i T_{i+1} + c_i (P_{i-1} T_i + Q_{i-1}) + d_i, \quad (17)$$

которое приводим к равенству вида (15). Коэффициенты P_i и Q_i запишем в виде

$$P_i = \frac{b_i}{a_i - c_i P_{i-1}}; \quad Q_i = \frac{d_i + c_i Q_{i-1}}{a_i - c_i P_{i-1}}. \quad (18)$$

Эти рекуррентные соотношения определяют P_i и Q_i через P_{i-1} и Q_{i-1} . На границе, при $i = 1$, $c_1 = 0$, P_i и Q_i определяются в следующем виде:

$$P_i = \frac{b_i}{a_i}; \quad Q_i = \frac{d_i}{a_i}. \quad (19)$$

На другой границе, при $i = N$, $b_N = 0$, получаем, что $P_N = 0$, $T_N = Q_N$.

С этого момента осуществляется обратная подстановка с использованием уравнения (15).

Алгоритм прогонки является удобным методом решения алгебраических одномерных уравнений, которые приводятся в виде (14), но не может быть легко расширен на случай двумерных уравнений. В таких случаях применяется метод переменных направлений.

Если в дискретном аналоге (8) в направлении оси y предположить известными T_C и $T_{Ю}$, то в нем останутся только три неизвестные: T_P , T_B и T_3 . Построив такие уравнения с тремя неизвестными вдоль линии, параллельной оси x , получим

$$a_i T_i = b_i T_{i+1} + c_i T_{i-1} + d_i, \quad (20)$$

где T_i , T_{i+1} и T_{i-1} соответствуют T_P , T_B и T_3 , а коэффициенты соотносятся следующим образом:

$$a_i = a_p; \quad b_i = a_b; \quad c_i = a_3; \quad d_i = a_C T_C^* + a_{Ю} T_{Ю}^* + b, \quad (21)$$

где T^* обозначает оценочное значение переменной.

Метод переменных направлений состоит в том, что сначала прогонка применяется для всех линий, парал-

лельных оси x , а затем повторяется для всех линий, параллельных оси y . Рассчитанные новые значения T вдоль линии используются в качестве оценок T^* при решении уравнений для соседней линии. Последовательность выбора линий может быть произвольной. В компьютерной системе сначала рассматривается линия вдоль оси x сразу над нижней границей. Затем все параллельные ей линии перебираются снизу вверх до верхней границы и в обратном направлении (с новыми оценками T^*). После этого применяется прогонка ко всем линиям вдоль оси y слева направо и обратно. Получение сошедшегося решения производится путем последовательных повторений вычислений (итераций).

Температурное поле металла на выходе из очага деформации определяется зависимостью

$$T_{P,t+\Delta t} = T_{P,t} + \Delta T_d, \quad \Delta T_d = \frac{\eta_b \sigma_s \ln(h_0 / h_1)}{\rho c},$$

где η_b – коэффициент выхода тепла (принимается равным 0,90); σ_s – сопротивление металла деформации при заданной температуре.

По изложенной выше математической модели расчета теплообмена раската в очаге деформации и в паузах между проходами разработан программный блок системы автоматизированного проектирования технологических процессов однониточной и многониточной горячей прокатки и последеформационного охлаждения в потоке стана, позволяющий рассчитывать температурные поля по сечению металла. Математическая модель адекватно описывает протекающие процессы и может использоваться для расчета температуры раската в очаге деформации, в паузах между проходами, деформационного разогрева и последеформационного охлаждения как ускоренного, так и на воздухе, энергосиловых параметров процесса и структурообразования при сортовой прокатке.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Смирнов В.К., Шилов В.А., Инатович Ю.В. Калибровка прокатных валков: Учеб. пособие для вузов. Изд. 2-е перераб. и доп. – М.: Теплотехник, 2010. – 490 с.
2. Patankar S.V. Numerical Heat Transfer and Fluid Flow. Series in Computational Methods and Thermal Science, Hemisphere Publishing Corporation, N.Y., 1980. – 124 p.
3. Патанкар С.В. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. – М.: Энергоатомиздат, 1984. – 124 с.
4. Трусов В.А., Зинкевич М.Б. // Производство проката. 2012. № 2. С. 7 – 11.
5. Патанкар С.В. Численное решение задач теплопроводности и конвективного теплообмена при течении в каналах: Пер. с англ. Е.В. Калабина; под. ред. Г.Г. Янькова. – М.: Изд. МЭИ, 2003. – 312 с.

© 2012 г. В.А. Трусов, М.Б. Зинкевич,
И.С. Новожилов
Поступила 27 марта 2012 г.