

УДК 669.04:621.783

О.Л. Базайкина, М.В. Темлянцев, В.И. Базайкин

Сибирский государственный индустриальный университет

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О НАГРЕВЕ ДВЕНАДЦАТИГРАННЫХ СЛИТКОВ ПРИ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ III РОДА*

Энергетическое и тяжелое машиностроение развивается в направлении увеличения единичной мощности энергетических установок. Это, в свою очередь, требует изготовления крупногабаритных роторов паровых, газовых турбин или генераторов, а также валов для силовых агрегатов большой мощности. В связи с этим в последнее время отмечается тенденция роста количества изделий, изготавливаемых из слитков массой до 70 т и выше. Слитки большой массы имеют, как правило, многогранное (восьми-, двенадцати- и более) поперечное сечение. При расчетах режимов и параметров тепловой обработки многогранных слитков возникает необходимость решения традиционной задачи нахождения температурных полей в теле слитка. Для слитков такой формы обычно в расчетах используют либо математические модели, реализованные на ЭВМ с помощью численных методов, либо, с рядом допущений, аналитические решения для цилиндра. Ранее в работах [1, 2] авторы получили приближенное решение задачи нагрева и остывания кузнечных слитков с сечением в виде правильных шести- и восьмиугольника. В настоящей работе методика авторов усовершенствована и применена к расчету температурного поля в слитке 12-угольного сечения бесконечной длины.

Необходимо остановиться на принципиальных моментах решения модельной задачи.

Рассматривается длинный брус с сечением в виде правильного многоугольника. В момент времени $\tau = 0$, когда температура в теле бруса равна t_0 , брус помещается в печь с заданной постоянной температурой t^* . На поверхности бруса задан теплообмен со средой по закону Ньютона. В силу симметрии сечения и условий задачи правильный m -угольник сечения бруса можно разбить на $2m$ равновеликих треугольников и задачу ставить для одного такого треугольника (рис. 1, треугольник OAB).

Обозначим $t(\tau, x, y)$ переменную температуру точек тела бруса с декартовыми координатами x, y в плоскости его поперечного сечения. Требуется найти решение $t(\tau, x, y)$ уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} \right)$$

такое, для которого на границе треугольника OAB выполняются условия:

1) на обращенной к среде части AB границы задан теплообмен со средой:

$$\lambda \frac{\partial t}{\partial n_1} = -\alpha(t - t^*) \text{ при } x = R \cos \beta, 0 \leq y \leq R \tan \beta;$$

здесь a – коэффициент температуропроводности материала бруса; λ – коэффициент теплопроводности; α – коэффициент теплообмена; R – радиус описанной вокруг сечения бруса окружности; β – угловой размер половины треугольника ($\beta = \pi/m$); n_1 – единичная нормаль к AB ; a, λ, α – постоянные;

2) отрезок OA ($y = \tan \beta \cdot x, 0 \leq x \leq R \cdot \cos \beta$), соединяющий центр сечения с вершиной многоугольника, теплоизолирован:

$$\frac{\partial t}{\partial n_2} = (\nabla t \bar{n}_2) = 0, \nabla t = \left(\frac{\partial t}{\partial x}, \frac{\partial t}{\partial y} \right), \bar{n}_2 = (-\sin \beta, \cos \beta);$$

$$-\sin \beta \frac{\partial t}{\partial x} + \cos \beta \frac{\partial t}{\partial y} = 0,$$

$$\tan \beta = \frac{\partial t}{\partial y} / \frac{\partial t}{\partial x} \text{ на отрезке } y = \tan \beta x;$$

$\bar{n}_2$ – вектор единичной нормали к отрезку OA .

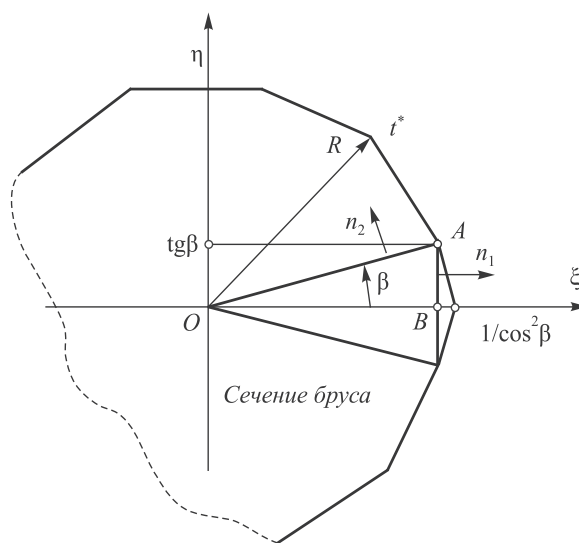


Рис. 1. Поперечное сечение бруса 12-угольного сечения: ξ, η – безразмерные декартовы координаты

* Работа выполнена по гранту Губернатора Кемеровской области для поддержки молодых ученых – докторов наук.

В силу симметрии задачи значения температуры на общей части OB границ двух половин треугольников ($y = 0, 0 \leq x \leq R \cdot \cos \beta$) совпадают, возможные потоки тепла через общую границу взаимно компенсируются.

В начальный момент $\tau = 0$ температура постоянна по сечению: $t(\tau, x, y) = t_0$ (выполняется начальное условие задачи).

Удобные для анализа безразмерные переменные и постоянные имеют вид

$$\xi = \frac{x}{R \cos \beta}, \quad 0 \leq \xi \leq 1; \quad \eta = \frac{y}{R \cos \beta}, \quad 0 \leq \eta \leq \tan \beta;$$

$$\phi = \frac{a\tau}{R^2 \cos^2 \beta}, \quad 0 \leq \phi \leq \infty; \quad Bi = \frac{\alpha R \cos \beta}{\lambda}, \quad 0 \leq Bi \leq \infty;$$

$$\theta = \frac{t^* - t}{t^* - t_0}, \quad 0 \leq \theta \leq 1.$$

Переменная ϕ и постоянная Bi являются значениями критериев Фурье и Био соответственно. В безразмерных величинах рассматриваемая задача запишется так:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \phi} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2};$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \xi} + Bi \theta = 0 \quad \text{при} \quad \xi = 1, \quad 0 \leq \eta \leq \tan \beta;$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \eta} = \tan \beta \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \quad \text{при} \quad \eta = \tan \beta \xi;$$

$$\theta = 1 \quad \text{при} \quad \phi = 0, \quad \lim_{\phi \rightarrow \infty} \theta = 0.$$

Используем метод разделения переменных: $\theta(\phi, \xi, \eta) = T(\phi)\omega(\xi, \eta)$; в результате подстановки в уравнение теплопроводности получаем решение для функции $T(\phi)$ и уравнение Гельмгольца [2] для функции $\omega(\xi, \eta)$

$$T(\phi) = C \exp(-\mu^2 \phi);$$

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2} + \mu^2 \omega = 0.$$

Решение уравнения Гельмгольца $\omega(\xi, \eta)$ представим в виде функции одной переменной [3] $s = a\xi + b\eta$, т.е. $\omega(\xi, \eta) = \omega(s)$; здесь a и b – произвольные постоянные. При указанном представлении уравнение Гельмгольца может быть сведено к обыкновенному дифференциальному уравнению $\omega''(s) + \frac{\mu^2}{a^2 + b^2} \omega(s) = 0$, одним из решений которого является семейство функций $\omega(\xi, \eta) = A \cos(\mu \cos \beta (\xi + \tan \beta \eta))$ (где A – произвольная постоянная), автоматически удовлетворяющих граничному условию 2.

Граничное условие 1 на поверхности бруса, унаследованное для функции $\omega(\xi, \eta) = \omega(s)$, задается в точке сечения бруса, лежащей на его ребре: $\xi = 1, \eta = \tan \beta$ или, что то же самое, на прямой $\xi + \tan \beta \eta = 1/\cos^2 \beta$,

лежащей вне сечения. Выполнение граничного условия приводит к уравнению

$$\tan\left(\frac{\mu}{\cos \beta}\right) = \frac{Bi/\cos^2 \beta}{\mu/\cos \beta},$$

решения μ_i которого являются собственными числами задачи и определяют собственные функции:

$$\omega_i(\xi, \eta) = \cos(\mu_i \cos \beta (\xi + \tan \beta \eta)).$$

Произведем ортогонализацию семейства функций $\{\omega_i(\xi, \eta)\}_{i=0}^{\infty}$, образовав ортогональный базис $\{h_i(\xi, \eta)\}_{i=0}^{\infty}$ пространства собственных функций, определенных на треугольнике OAB .

Возвращаясь к начальному условию задачи $\theta(0, \xi, \eta) = \omega_0(\xi, \eta) \equiv 1$, получаем разложение начального условия (единицы) по базису $\{h_i(\xi, \eta)\}_{i=0}^{\infty}$. Так как каждая базисная функция $h_j(\xi, \eta)$ является линейной комбинацией собственных функций $\omega_i(\xi, \eta)$, то функциональный ряд $\sum_{j=1}^{\infty} a_j h_j(\xi, \eta) = 1$ принимает форму разложения начального условия по пространственным собственным функциям задачи, что позволяет найти коэффициенты b_j разложения:

$$\sum_{j=1}^m a_j h_j(\xi, \eta) = \sum_{j=1}^m b_j w_j(\xi, \eta).$$

Структура части решения задачи, зависящая от пространственных координат, определена.

Вернемся к временной части $T(\phi) = C \exp(-\mu^2 \phi)$ решения. Сечение бруса обладает осевой симметрией, предполагающей замкнутость семейства треугольников сечения, что не учитывается локальной постановкой задачи для половины треугольника. Поэтому для временных множителей предлагается использовать собственные числа решения задачи для цилиндра [4] с эффективным радиусом $R_{\text{эф}}$:

$$R_{\text{эф}} = R \sqrt{\frac{2\beta}{\sin(2\beta)}}.$$

Как известно, собственные числа v_j задачи для цилиндра являются корнями уравнения [5]

$$Bi J_0(v) - v J_1(v) = 0,$$

где $J_0(x)$ и $J_1(x)$ – функции Бесселя первого рода нулевого и первого порядков соответственно.

Найдя корни, получаем временные множители слагаемых решения: $T_i(\phi) = \exp(-v_i^2 \phi)$.

Приходим к решению задачи в безразмерных переменных и постоянных:

$$\theta(\phi, \xi, \eta) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i \exp(-v_i^2 \phi) \cos(\mu_i \cos \beta (\xi + \tan \beta \eta)); \quad (1)$$

переменное во времени поле физической температуры t в треугольнике OAB можно рассчитывать в размерном времени τ , мин, и в безразмерных пространственных координатах ξ, η :

$$t(\tau, \xi, \eta) = t + (t^* - t_0) \sum_{i=1}^{\infty} b_i \exp(-v_i^2 \phi \tau) \times \cos(\mu_i \cos \beta (\xi + \tan \beta \eta)), \quad (2)$$

где ϕ_0 – значение критерия Фурье, соответствующее принятой единице времени.

Вышеизложенная схема решения задачи реализована в модульной программе расчета в операторах и процедурах пакета Maple 14. Программа использована для построения зависимостей $\theta = f(Bi, \phi)$ безразмерных переменных в виде номограмм для бруса 12-угольного сечения, отсюда численное задание границ треугольника OAB при вычислении двойных интегралов выполнялось по процедуре «with (student): Doebleint ($f(\xi, \eta)$, $\xi = c \cdot \eta \dots d - g \cdot \eta$, $\eta = 0 \dots p$); value (%);». Безразмерная переменная ϕ с точки зрения теории подобия является критерием Фурье рассматриваемой задачи, поэтому в номограммах она принимает обозначение Fo . Тело программы приведено ниже:

1. Расчет собственных чисел цилиндра радиуса R_{ϕ} ,

$$Bic = Bi \sqrt{\frac{\tan \beta}{\beta}};$$

```
> eignmc := module() global sv; Bic := число 1;
v := vector(8, [0.7, 4., 7., 10., 13., 16., 19., 22.]);
eq := Bic · BesselJ(0, ξ) – ξ · BesselJ(1, ξ) = 0;
sv := array(1..8); for n from 1 to 8 do
sv[n] := fsolve(eq, 'ξ' = v[n]); end do; end module;
```

```
> {sv[1], sv[2], sv[3], sv[4], sv[5], sv[6], sv[7], sv[8]};
```

2. Расчет собственных чисел бруса, $Bib = Bi / \cos^2 \beta$:

```
> eignmb := module() global см; Bib := число 2;
μ := vector(8, [0.5, 3., 6., 9., 12., 15., 18., 21.]);
eq := tan(ξ) – Bib / ξ = 0; см := array(1..8);
for n from 1 to 8 do см[n] := fsolve(eq, 'ξ' = μ[n]);
end do; end module;
```

```
> {см[1], см[2], см[3], см[4], см[5], см[6], см[7], см[8]};
```

3. Расчет ортонормированного базиса функций пространственных координат:

```
> Dint := proc(F) global H; with(student): Doebleint(F,
ξ = 3.732 · η .. 1.0718 – 0.268 · η, η = 0 .. 0.268);
value(%); end;
```

```
> eigfunc := module() global H, r, OH, d, i, m;
mc := array(1..8); for n from 1 to 8 do
mc[n] := 0.75 · см[n]; H[n] := cos(mc[n] · (ξ + 0.5744 · η));
```

```
end do; OH := array(1..8); r := array(1..8);
OH[1] := H[1]; r[1] := Dint(OH[1]^2); p := array(1..7,
1..8); d := array(1..7, 1..8); m := 2;
p[1, 2] := Dint(OH[1] · OH[2]); d[1, 2] := p[1, 2] / r[1];
OH[2] := H[2] + d[1, 2] · OH[1]; r[2] := Dint(OH[2]^2);
for i from 1 to 2 do p[i, 3] := Dint(OH[i] · H[3]);
d[i, 3] := –p[i, 3] / r[i]; end do; OH[3] := H[3] +
sum(d[k, 3] · OH[k], k = 1..2); r[3] := Dint(OH[3]^2);
for i from 1 to 3 do p[i, 4] := Dint(OH[i] · H[4]);
d[i, 4] := –p[i, 4] / r[i]; end do; OH[4] := H[4] +
sum(d[k, 4] · OH[k], k = 1..3); r[4] := Dint(OH[4]^2);
for i from 1 to 4 do p[i, 5] := Dint(OH[i] · H[5]);
d[i, 5] := –p[i, 5] / r[i]; end do; OH[5] := H[5] +
sum(d[k, 5] · OH[k], k = 1..4); r[5] := Dint(OH[5]^2);
for i from 1 to 5 do p[i, 6] := Dint(OH[i] · H[6]);
d[i, 6] := –p[i, 6] / r[i]; end do; OH[6] := H[6] +
sum(d[k, 6] · OH[k], k = 1..5); r[6] := Dint(OH[6]^2);
for i from 1 to 6 do p[i, 7] := Dint(OH[i] · H[7]);
d[i, 7] := –p[i, 7] / r[i]; end do; OH[7] := H[7] +
sum(d[k, 7] · OH[k], k = 1..6); r[7] := Dint(OH[7]^2);
for i from 1 to 7 do p[i, 8] := Dint(OH[i] · H[8]);
d[i, 8] := –p[i, 8] / r[i]; end do; OH[8] := H[8] +
sum(d[k, 8] · OH[k], k = 1..7); r[8] := Dint(OH[8]^2);
end module;
```

4. Разложение единицы (прогонка начального условия) и построение решения θ :

```
> RazI := module() global a, r, OH, Q, QI, W, tQ;
b := array(1..8); a := array(1..8); for i from 1 to 8 do
b[i] := Dint(OH[i]); a[i] := b[i] / r[i]; end do;
Q := sum(a[k] · OH[k], k = 1..8); sort(Q);
QI := convert(Q, set); tQ := sum(exp(–sv[k]^2 · Fo) ·
QI[k], k = 1..8); end module;
> tQ; θ := tQ;
> ξ := 1; η := 0;
```

Последняя строчка программы фиксирует точку (ξ, η) сечения бруса, для которой определяется зависимость $\theta = f(Bi, Fo)$. Следует указать, что приближениями аналитических решений в программе являются отрезки функциональных рядов, удерживающие первые восемь членов каждого ряда. На рис. 2 представлены номограммы для оси, ребра и середины грани бруса 12-угольного сечения для широкого диапазона значений критерия Bi .

Покажем применение рассматриваемого метода расчета к оценке времени нагрева под кузнечную обработку двенадцатиугольного слитка массой 37,5 т (температура погрузки 800 °С, задаваемая температура нагрева 1100 °С, температура печи 1300 °С; диаметры окружностей, вписанных в наибольшее и наименьшее по размерам сечение корпуса слитка, составляют 1,605 и 1,355 м соответственно). Примем

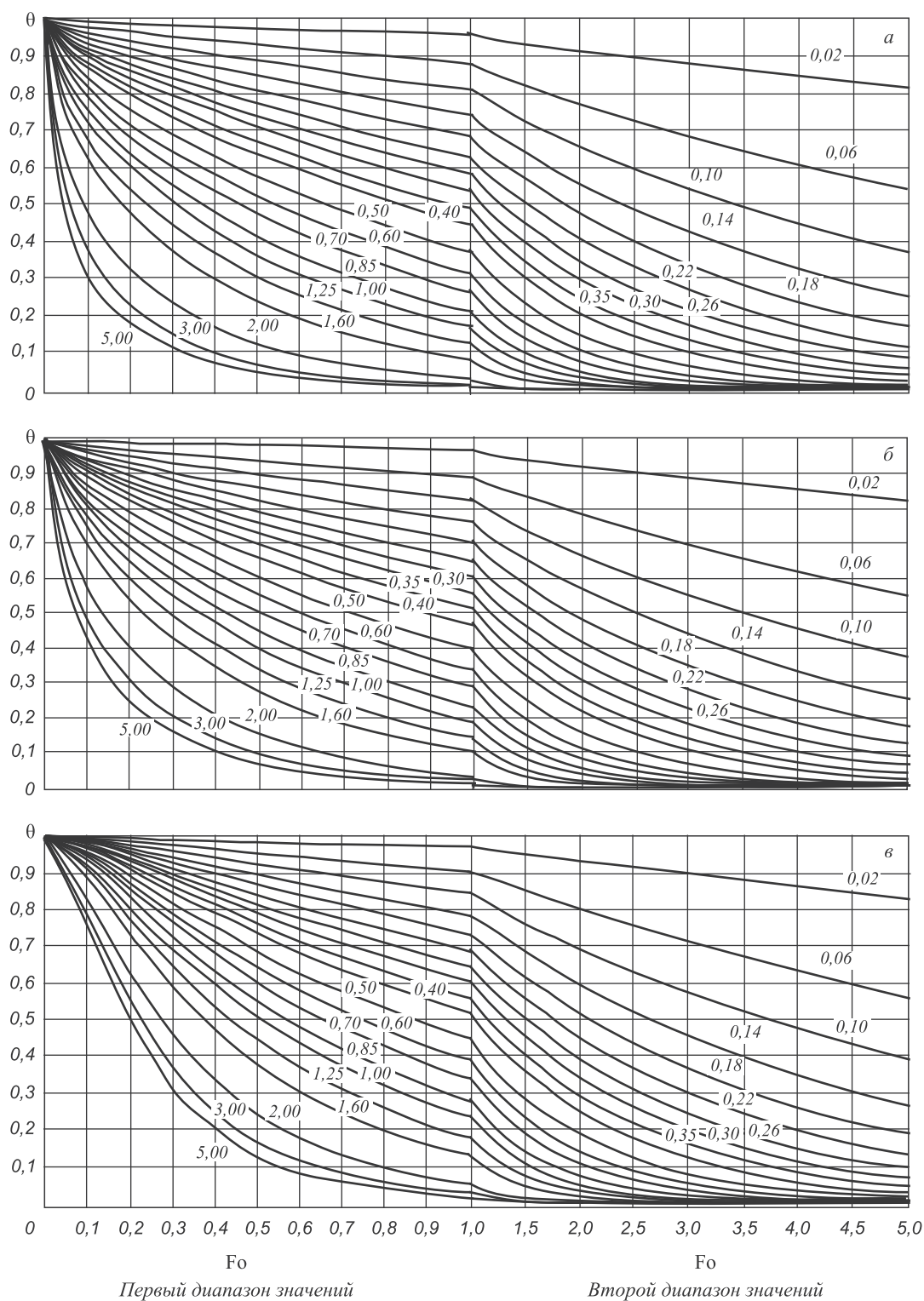


Рис. 2. Относительная температура середины грани (а), ребра (б) и оси (в) бруса 12-угольного сечения в зависимости от критерия Фурье. Числа на кривых – значения Bi

следующие значения параметров, определяющих геометрию, теплофизические свойства и условия нагрева стального бруса: $\alpha = 300 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$, $\lambda = 28 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$, $a = 6,9 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$, $R = 0,766 \text{ м}$, $t_0 = 800 \text{ }^\circ\text{C}$, $t^* = 1300 \text{ }^\circ\text{C}$. На рис. 3 представлены кривые нагрева и перепада температур в трех характерных точках сечения слит-

ка, рассчитанные по программе и формуле (2). Видно, что ввиду массивности слитка нагрев до заданной температуры поверхности достигается за 2,3 ч. При этом наибольший перепад температур между осью и поверхностью слитка достигается через 2 ч нагрева и составляет $230 \text{ }^\circ\text{C}$.

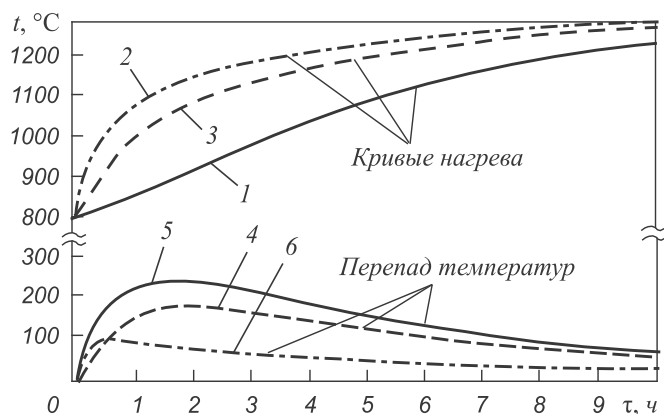


Рис. 3. Кривые нагрева и перепада температур слитка 12-угольного сечения (геометрические и физические данные: $\alpha = 300 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$, $\lambda = 28 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$, $a = 6,9 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$, $R = 0,766 \text{ м}$, $t_0 = 800 \text{ }^\circ\text{C}$, $t^* = 1300 \text{ }^\circ\text{C}$);
1 – центр сечения бруса; 2 – ребро бруса; 3 – середина грани;
4 – перепад грань – ось; 5 – перепад ребро – ось;
6 – перепад ребро – грань

дульной программе на языке математического пакета Maple. Программа позволяет строить номограммы безразмерных температур для любой точки бруса в необходимом диапазоне значений критерия Bi , а также оценивать время нагрева или охлаждения массивных кузнечных слитков. В качестве реализации метода расчета представлены номограммы и кривые нагрева для стального слитка 12-угольного сечения.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Базайкина О.Л., Темлянец М.В. // Вестник горно-металлургической секции РАЕН. Отделение металлургии: сб. науч. тр. / СибГИУ. – М. – Новокузнецк, 2011. Вып. 28. С. 28 – 36.
2. Базайкина О.Л., Темлянец М.В. // Изв. вуз. Черная металлургия. 2011. № 12. С. 29 – 33.
3. Полянин А.Д., Зайцев В.Ф. Справочник по нелинейным уравнениям математической физики. – М.: ФМЛ, 2002. – 431 с.
4. Лыков А.В. Теория теплопроводности. – М.: ГИТЛ, 1952. – 392 с.
5. Кошляков Н.С. Уравнения в частных производных математической физики. – М.: Высшая школа, 1970. – 710 с.

© 2012 г. О.Л. Базайкина, М.В. Темлянец,
В.И. Базайкин
Поступила 28 февраля 2012 г.

Выводы. Разработанный метод решения задачи нагрева бруса многоугольного сечения с граничными условиями третьего рода обобщен и реализован в мо-