

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И АВТОМАТИЗАЦИЯ В ЧЕРНОЙ МЕТАЛЛУРГИИ

УДК 669:620.170.1:519.642

Н.В. Важенцева, С.М. Зеркаль

Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ЗАДАЧАХ ПРОМЫШЛЕННОЙ ТОМОГРАФИЧЕСКОЙ ДИАГНОСТИКИ В УСЛОВИЯХ НЕПОЛНОТЫ ПРОЕКЦИОННЫХ ДАННЫХ

Аннотация. Предложено использовать аналог теоремы Пэли-Винера, которая позволяет синтезировать неизвестные проекции по известным. Были собраны и проанализированы требования, на основе которых была спроектирована и реализована программа моделирования процесса снятия синограммы, вычисления коэффициентов однородного многочлена, анализа точности восстановления объекта по коэффициентам и на основе реальных данных.

Ключевые слова: компьютерная томография, неполные данные, аналог теоремы Пэли-Винера, моменты проекций.

MATHEMATICAL MODELING IN INDUSTRIAL TOMOGRAPHIC DIAGNOSIS WITH INCOMPLETE PROJECTION DATA

Abstract. In this article it has been proposed to use the analog of the Pelly-Wiener theorem; the theorem allows to synthesize the unknown projections using known projections. Within the research the special requirements were collected and analyzed, on basis of which the program for modeling sinogram obtaining process, calculating the coefficients of a homogeneous polynomial, examining the fidelity of the object reconstruction was projected and realized using coefficients and actual data.

Keywords: computed tomography, incomplete data, analog theorem of Peli-Wiener, moment of the projections.

Вычислительная томография – новое направление в науке, возникшее во второй половине двадцатого столетия, испытывающее интенсивное развитие и в настоящее время. Метод вычислительной (компьютерной) томографии позволяет по характеристикам пропущенного через исследуемый объект зондирующего излучения (трансмиссионная томография) или его собственного излучения (эмиссионная томография) судить о внутреннем устройстве, физическом состоянии или химическом составе этого объекта. Основы этого метода заложены в работах Кормака (1963 г.), Хаунсфилда (1972 г.), которые были удостоены Нобелевской премии в 1979 г. Восстановление внутренней структуры объекта стало возможным после предложения И. Радона в 1917 г. метода решения задачи интегральной геометрии, состоящего в реконструкции функций по их интегральным характеристикам, такие задачи принято называть обратными. Последним свойственно обращение причинно-следственных связей. В настоящей работе следствием является отклик исследуемой среды на зондирующее излучение, а причиной – свойства среды, оказавшие влияние на этот отклик. Решение обратных задач связано с преодолением серьезных математических трудностей, связанных с их так называемой некорректностью. Таким образом, построение удачных конструктивных математических моделей

этих задач явилось важной составляющей современной математики.

В компьютерной томографии линейка детекторов измеряет интенсивность излучения, прошедшего через исследуемый объект (например, рентгеновские лучи). В соответствии с законом Бугера-Ламберта-Бера, интенсивность излучения I , измеряемая детектором в точке r вдоль прямой AA' , выражается следующим соотношением:

$$I = I_0 e^{-\int_{AA'} \mu(x,y) dz},$$

где I_0 – интенсивность источника излучения; $\mu(x,y)$ – коэффициент поглощения объекта для рассматриваемого типа излучения, который тесно связан с плотностью объекта.

Преобразование, ставящее в соответствие функции двух переменных набор ее интегралов вдоль прямых, называется двумерным преобразованием Радона. Оно определяется следующим образом:

$$f(\varphi, t) \equiv (Rg)(\varphi, t) = \int_{-\infty}^{\infty} g\left(\sqrt{t^2 + p^2}, \varphi + \arctan \frac{p}{t}\right) dp, \quad (1)$$

где $t, p \in R^1$; $\varphi \in [0, 2\pi]$; интегрирование ведется по прямой; R – оператор преобразования Радона; φ и t – па-

раметры функции, определяющие положение прямой сканирования (угол между осью ординат и расстояние от начала координат до прямой); p – параметр интегрирования.

Для двумерного преобразования Радона имеет место формула обращения, которая может быть записана в виде

$$g(\psi, r) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\pi \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{r \cos(\varphi - \psi) - t} \frac{\partial}{\partial t} f(\varphi, t) dt d\varphi. \quad (2)$$

где ψ, r – параметры искомой функции в полярных координатах.

Из выражения (2) видно, что оценка искомой функции g по конечному набору проекционных данных будет тем лучше, чем точнее будут аппроксимированы интегралы. В частности, отсюда следует, что проекции должны быть равномерно распределены в интервале $[0, \pi]$, что при решении практических задач часто не соблюдается. В связи с этим возникают трудности, которые не позволяют в таких ситуациях использовать аппарат вычислительной томографии на полных данных.

На практике значения интегралов можно измерить только для конечного числа прямых. Расположение этих прямых, которое будем называть схемой сканирования, определяется конструкцией сканера. В основном используются две схемы сканирования (рис. 1). Параллельная схема представляет собой систему равноудаленных друг от друга параллельных прямых, заданных для нескольких направлений, разделенных равными угловыми интервалами. В этом случае требуется один источник и один детектор, которые движутся параллельно друг другу и поворачиваются в процессе сканирования. В веерной схеме сканирования источник описывает окружность вокруг тела, испуская веер рентгеновских лучей, которые регистрируются линейкой детекторов. Параллельное сканирование применяли в сканере А. Кормака образца 1963 г. и в первом коммерческом сканере, разработанном Дж. Хаунсфилдом (EMI).

Результаты измерений в томографическом эксперименте представляются в виде проекционной матрицы. Проекцией называется вектор измерений, полученный при фиксированном угле сканирования. При этом традиционно проекции заполняют матрицу по столбцам, однако это не имеет принципиального значения.

Особый интерес представляют томографические задачи, возникающие в условиях, когда просвечивание всего объекта невозможно по тем или иным причинам, что приводит к неполноте исходных (проекционных) данных в томографическом эксперименте. Задачи с неполными проекционными данными являются сравнительно мало изученными в отличие от постановок, использующих полные данные. Вычислительная томография на полных данных к настоящему времени прочно вошла в человеческую практику, об этом говорит широкое использование медицинских и промышленных томографов.

Для преобразования Радона имеет место условие Кавальери (аналог теоремы Пэли-Винера). Обозначив через $M_k(\varphi)$ момент k -го порядка от параллельной проекции, получим

$$M_k(\varphi) = \int_{-\infty}^\infty f(\vec{n}(\varphi), t) t^k dt, \quad (3)$$

где $\vec{n}(\varphi)$ – вектор нормали к прямой, вдоль которой производится интегрирование в уравнении (1); f – преобразование Радона.

Согласно условию Кавальери, все значения $M_k(\varphi)$ являются однородными многочленами степени k от компонент \vec{n} [1]:

$$M_k(\varphi) = \sum_{l=0}^k a_{lk} \cos^l(\varphi) \sin^{k-l}(\varphi), \quad k = 0, 1, \dots \quad (4)$$

Причем коэффициенты a_{lk} не зависят от угла φ .

Далее представлен алгоритм, реализующий пополнение проекционных данных на основании условия Кавальери. Пусть в угловом интервале $[0, \varphi_0]$ измерено

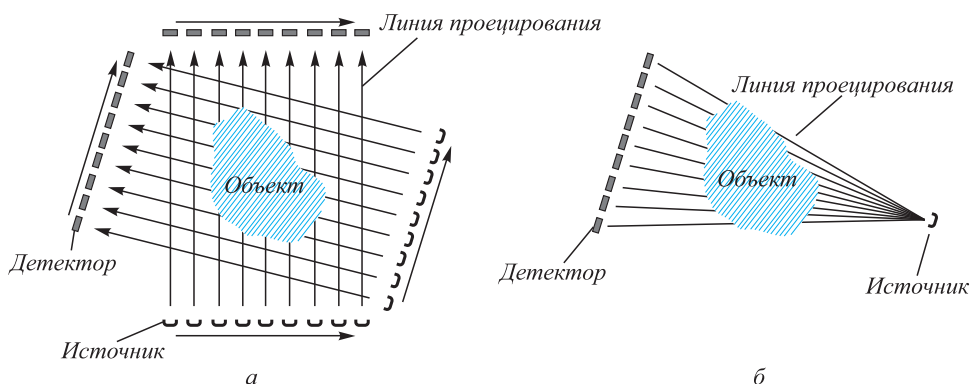


Рис. 1. Схемы сканирования:

а – круговая геометрия измерений с параллельными проекциями; б – веерная схема сканирования

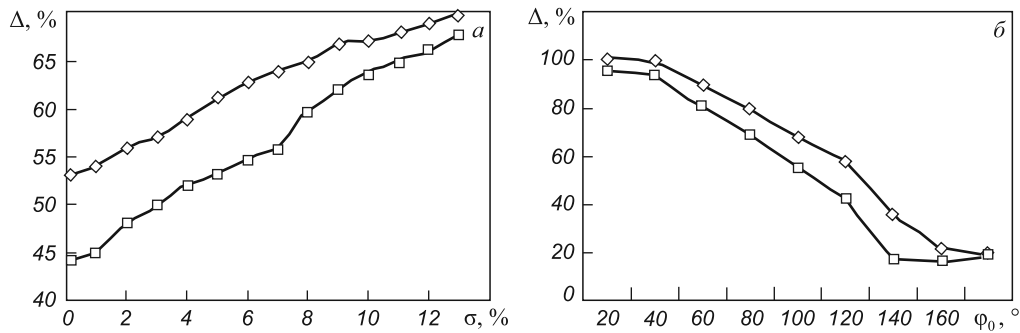


Рис. 2. Зависимости среднеквадратичной ошибки томографической реконструкции от уровня шумов в проекционных данных (а) и от угла, в котором измеряются проекционные данные (б):
 ◇ и □ – неполные и пополненные данные

N проекций с равномерным шагом $\Delta\varphi$ по углу. Обозначим через N_1 целую часть числа $(\pi - \varphi_0)/\Delta\varphi$. На первом шаге алгоритма для каждой известной проекции вычисляются моменты от 1-го до K -го порядка включительно. По условию Кавальери для определения неизвестных коэффициентов однородных полиномов a_{lk} имеется K систем линейных уравнений вида

$$\begin{cases} M_k(0) = \sum_{l=0}^k a_{lk} \cos^l(0) \sin^{k-l}(0); \\ M_k(\Delta\varphi) = \sum_{l=0}^k a_{lk} \cos^l(\Delta\varphi) \sin^{k-l}(\Delta\varphi); \\ M_k(2\Delta\varphi) = \sum_{l=0}^k a_{lk} \cos^l(2\Delta\varphi) \sin^{k-l}(2\Delta\varphi); \\ \vdots \\ M_k((N-1)\Delta\varphi) = \\ = \sum_{l=0}^k a_{lk} \cos^l((N-1)\Delta\varphi) \sin^{k-l}((N-1)\Delta\varphi). \end{cases} \quad (5)$$

Каждая функция из системы уравнений (5) содержит N выражений и $k+1$ неизвестных. Выбор метода решения системы (5) зависит от конкретных условий, в частности, от соотношения чисел N и k .

На следующем шаге по формуле (4) с использованием полученных коэффициентов a_{lk} вычисляются моменты с 1-го до K -го порядка для N_1 неизвестных проекций: $M_k(i\Delta\varphi)$, $i = N, N+1, \dots, N+N_1-1$. Моменты нулевого порядка для всех проекций одинаковы.

Учитывая, что проекции имеют ограниченный носитель, аппроксимируем интеграл (3) конечной суммой:

$$M_k(\varphi) = h \sum_{j=1}^J f(\varphi, t_j) (t_j)^k, \quad (6)$$

где h – шаг равномерной сетки, на которой заданы проекции.

Выражение (6) представляет собой систему из $K+1$ линейных уравнений для определения J значений неизвестной проекции в узлах сетки. В настоящей работе,

также как и в работе [2], имеет место $K \ll J$, в связи с этим систему уравнений (6) решали алгоритмом ART.

При восстановлении недостающих проекций в методе, основанном на условии Кавальери, использовали 15 первых моментов. Реконструкцию по пополненному набору данных проводили при помощи алгоритма Шеппа-Логана. Зашумленные проекции предварительно сглаживали регуляризирующими сплайнами.

На рис. 2, а даны зависимости среднеквадратичной ошибки Δ от корня из дисперсии случайного шума σ . Величина σ приведена в процентах от максимального значения проекции. Количество проекций составляет 128. На рис. 2, б представлено изменение величины Δ от угла φ_0 . На рис. 3 приведена зависимость числа обусловленности системы уравнений (5) от порядка момента K , кривые соответствуют различным значениям величины угла, в котором проекционные данные известны. На рис. 4 представлены зависимости ошибки Δ от величины угла для различного числа проекций. Шум в проекционных данных отсутствует.

Выводы. Полученные в настоящей работе результаты представляют собой численную модель, развивающую томографический подход, без ограничения общности

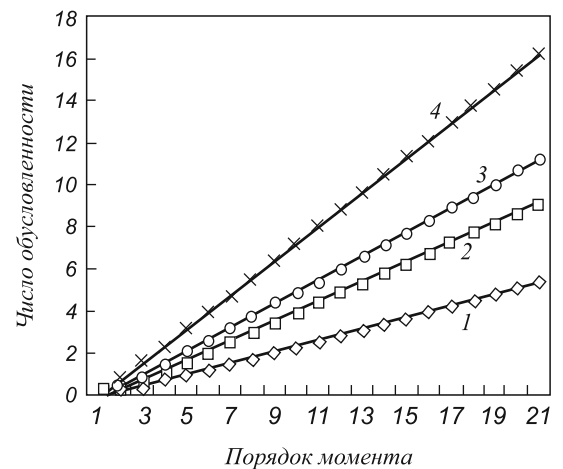


Рис. 3. Кривые соответствующие разным величинам угла сканирования:
 1 – 4 – углы 180°, 100°, 80°, 40°

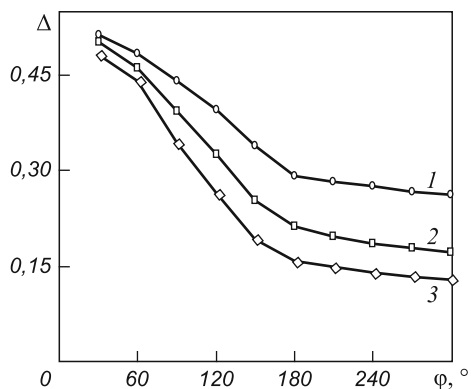


Рис. 4. Зависимости ошибки Δ от величины угла φ для различного числа проекций:
1 – 3 – 50, 75, 10 проекций

как для трансмиссионной томографии (зондирующее проникающее излучение генерируется внешним по отношению к объекту исследования источником), так и для эмиссионной томографии (зондирующее излучение

генерируется самим объектом исследования). Области применения разработанной технологии являются, прежде всего, промышленная дефектоскопия и медицина. Особый интерес представляют задачи эмиссионной томографии, в том числе мониторинг, диагностика состояния и температурного распределения объектов металлургии. Кроме того, при томографических исследованиях объектов горного дела, как правило, не удается получить полную томографическую информацию и эти результаты могут быть использованы и при решении геотомографических задач.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Гельфанд И.М., Граев М.И., Виленкин Н.Я. Избранные задачи интегральной геометрии. – М.: Добросвет, 2000. – 656 с.
2. Важенцева Н.В., Лихачёв А.В. // Автометрия. 2012. Т. 48. № 6. С. 35 – 45.

© 2013 г. Н.В. Важенцева, С.М. Зеркаль
Поступила 23 апреля 2013 г.