

УДК 621.746

*И.Ф. Селянин, В.Б. Деев, О.Г. Приходько,  
А.А. Куценко, В.А. Дегтярь*

Сибирский государственный индустриальный университет

## ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ОТДЕЛЬНЫХ ЧЛЕНОВ УРАВНЕНИЯ НАВЬЕ-СТОКСА, ПРИМЕНЯЕМОГО ДЛЯ РЕШЕНИЯ МЕТАЛЛУРГИЧЕСКИХ И ЛИТЕЙНЫХ ЗАДАЧ\*

**Аннотация.** При рассмотрении уравнения Навье-Стокса проведен анализ сил, действующих на грани элементарного кубического объема жидкости или газа, что дает наглядную физико-механическую трактовку отдельных членов этого уравнения. В результате выражение можно успешно использовать при решении различных металлургических и литейных задач.

**Ключевые слова:** уравнение Навье-Стокса, металлургические и литейные задачи.

## PHYSICAL-MECHANICAL INTERPRETATION OF THE INDIVIDUAL TERMS OF THE NAVIER-STOKES EQUATION APPLIED TO SOLVE METALLURGICAL AND FOUNDRY PROBLEMS

**Abstract.** When considering the Navier-Stokes equation the analysis of forces, affecting on the verges of elementary cubic liquid or gas volume, was carried out. This in turn gives a clear physical-mechanical interpretation of the individual terms of this equation. As a result, the equation can be successfully used to solve various metallurgical and foundry problems.

**Keywords:** the Navier-Stokes equation, metallurgical and foundry problems.

Металлургам, литейщикам и многим исследователям других технологических направлений часто приходится использовать уравнение Навье-Стокса для определения локальных значений скорости и давления в потоке жидкости или газа. Уравнение Навье-Стокса по трем осям ( $X, Y, Z$ ) декартовых координат записывают следующим образом:

$$\begin{aligned} & \rho \left( \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = \\ & = \rho g_x - \frac{\partial P}{\partial x} + \eta \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right); \\ & \rho \left( \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) = \\ & = \rho g_y - \frac{\partial P}{\partial y} + \eta \left( \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right); \\ & \rho \left( \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = \\ & = \rho g_z - \frac{\partial P}{\partial z} + \eta \left( \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right), \end{aligned} \quad (1)$$

здесь  $\rho$  и  $\eta$  – плотность и динамическая вязкость жидкости или газа;  $v_x, v_y, v_z$  – компоненты скорости по осям

координат;  $t$  – время;  $P$  – давление в локальной точке потока;  $g_z = g; g_x = g_y = 0$ , ось  $Z$  направлена вертикально.

Система уравнений (1) замыкается выражением неразрывности несжимаемых жидкости или газа:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \quad (2)$$

Для технологических объектов (металлургических печей, литниковых систем и др.) уравнения (1), (2) возможно решить только численным методом и определить параметры  $v_x, v_y, v_z$  и  $P$  в локальных объемах исследуемого объекта.

Система уравнений (1) является следствием применения второго закона механики для элемента объема  $\Delta V$  жидкости. Для твердого тела этот закон имеет вид

$$\frac{\Delta m dv}{dt} = F, \quad (3)$$

где  $\Delta m$  – масса элемента объема;  $F$  – сила, действующая на элемент массы.

В твердом теле все элементарные объемы связаны между собой жестко, и тело движется под действием внешних сил как единое целое. В жидкости (газе) элементарные объемы не связаны между собой жестко, для каждого из них при движении изменяются скорость и направление вектора скорости. Изменение компонент последнего на плоскость  $XOY$  в различные моменты времени схематично представлено на рис. 1.

\* Работа выполняется в соответствии с реализацией Минобрнаукой федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России». Соглашение № 14.132.21.1661.

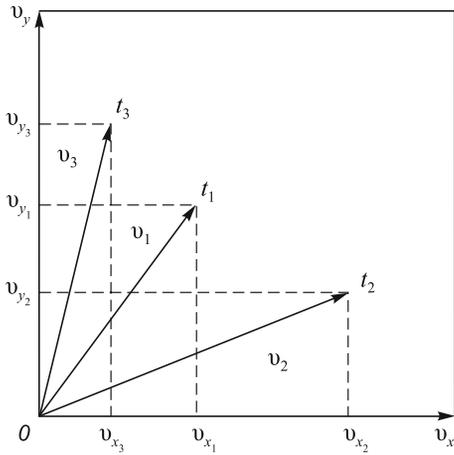


Рис. 1. Схема движения микрообъема жидкости в проекции на плоскость  $XOY$

Следовательно, левая часть формулы (3) должна быть записана для каждой проекции вектора скорости  $(v_x, v_y, v_z)$ .

При развертке представленной записи учтем, что каждая компонента вектора скорости на оси координат изменяется во времени  $t$  и в зависимости от координат  $X, Y, Z$  рассматриваемого микрообъема. Математически вышесказанное записывается так:  $v_x[x(t), y(t), z(t), t]$ ;  $v_y[x(t), y(t), z(t), t]$ ;  $v_z[x(t), y(t), z(t), t]$ .

Применяя правило дифференцирования сложной функции для  $v_x[x(t), y(t), z(t), t]$ , для левой части уравнения (3) имеем

$$\frac{\Delta m}{\Delta V} \left( \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} \right) = \frac{F_x}{\Delta V}. \quad (4)$$

В выражении (4) элемент массы отнесен к элементу его объема. В жидкости (газе) параметры  $\Delta m$  и  $\Delta V$  изменяются в пространстве и во времени в процессе движения, но для несжимаемой жидкости (газа) это отношение  $\Delta m/\Delta V = \rho$ , т.е. плотность является постоянной величиной.

С учетом того, что  $\partial x/\partial t = v_x$ ,  $\partial y/\partial t = v_y$ ,  $\partial z/\partial t = v_z$  формула (4) принимает окончательный вид:

$$\rho \left( \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = \frac{F_x}{\Delta V}. \quad (5)$$

Для величин  $v_y$  и  $v_z$  справедливы аналогичные выражения.

Сила  $F$ , действующая на элемент объема жидкости, складывается из трех составляющих:

$$\frac{F}{\Delta V} = \frac{F_g}{\Delta V} + \frac{F_p}{\Delta V} + \frac{F_\eta}{\Delta V}, \quad (6)$$

где  $F_g, F_p$  и  $F_\eta$  – соответственно силы веса, от градиента давления и торможения, связанная с вязкостью жидкости.

Силу веса, отнесенную к элементу объема, найдем по формуле

$$\frac{F_g}{\Delta V} = \frac{\Delta m}{\Delta V} g_z = \rho g_z. \quad (7)$$

Для трубки тока на элементе длины  $\Delta x$  сила  $F_p$  за счет падения давления  $\Delta P$  равна (рис. 2)

$$F_p = (P - \Delta P - P)S_{тр} = -\Delta P S_{тр}, \quad (8)$$

где  $S_{тр}$  – площадь сечения трубки.

Величину  $F_p/\Delta V$  с учетом уравнения (8) определим по следующему выражению:

$$\frac{F_p}{\Delta V} = -\frac{\Delta P S_{тр}}{S_{тр} \Delta x} = -\frac{\Delta P}{\Delta x} = -\frac{\partial P}{\partial x}. \quad (9)$$

В учебниках [1, 2] по гидродинамике правая часть уравнений Навье-Стокса выводится с использованием тензорного исчисления, которое не входит в учебные планы вузов по математике рядовых технологических специальностей.

Покажем, что правую часть уравнений системы (1) можно получить, не прибегая к тензорному исчислению, а рассматривая деформацию элементарного объема в виде куба под действием касательных и нормальных напряжений на его грани.

Силу торможения за счет сил вязкости вдоль оси  $X$  определяем по следующей формуле:

$$\sum \frac{F_{x\eta}}{\Delta V} = \frac{F_{xz} + F_{xy} + F_{\alpha x}}{\Delta V}, \quad (10)$$

где  $F_{xz}, F_{xy}, F_{\alpha x}$  – силы от касательного напряжения, действующие на элементарный объем  $\Delta V$  в виде куба в плоскостях  $XY$  (рис. 3, а),  $XZ$  (рис. 3, б),  $YZ$  (рис. 3, в).

Рассмотрим силу вязкого трения, действующую на внутренний элементарный объем в виде куба с ребром  $a$  (рис. 3, а). На нижнюю площадку куба действует

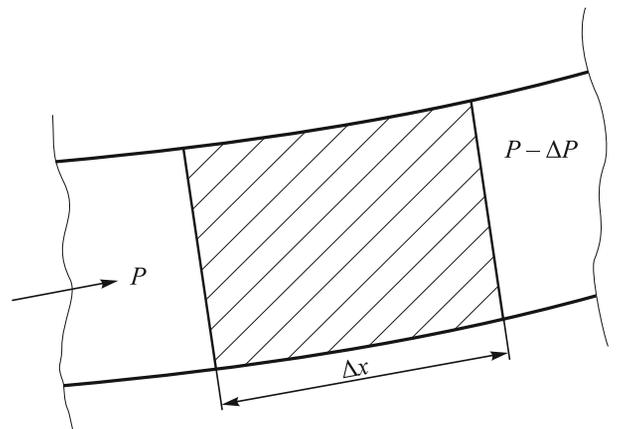


Рис. 2. Схема, поясняющая движение микрообъема жидкости под действием величины  $\Delta P$

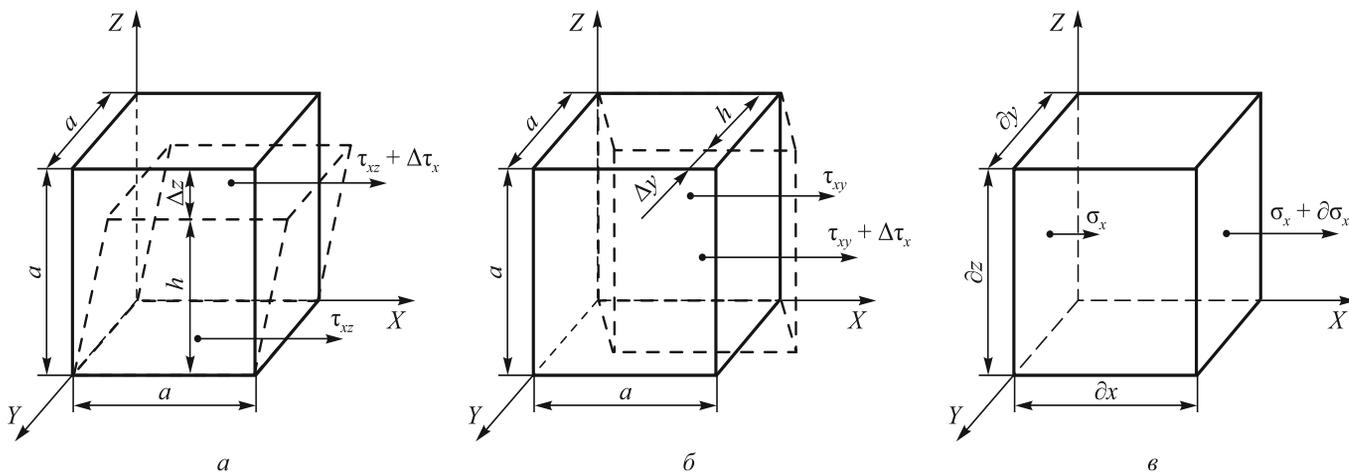


Рис. 3. Схема деформации кубического элементарного объема в плоскости XY (а), XZ (б), YZ (в)

касательное напряжение  $\tau_{xz}$ , на верхнюю площадку –  $\tau_{xz} + \Delta\tau_x$ . Изменение касательных напряжений по высоте куба найдем по выражению

$$\Delta\tau_x = \tau_{xz} + \Delta\tau_x - \tau_{xz}.$$

Общая касательная сила, искажающая куб вдоль оси X и действующая на верхнюю грань, равна

$$F_{xz} = \Delta\tau_{xz} a^2. \quad (11)$$

При деформации куба происходит уменьшение его объема на величину

$$\begin{aligned} \Delta V' &= \Delta V - \Delta V_{\text{призмы}} = \\ &= a^3 - a^2 h = a^3 - a^2(a - \Delta z) = a^2 \Delta z, \end{aligned} \quad (12)$$

где  $h = a - \Delta z$  – высота призмы (рис. 3, а).

Тогда общую касательную силу определяем по следующему уравнению:

$$\frac{F_{xz}}{\Delta V'} = \frac{\Delta\tau_x a^2}{a^2 \Delta z} = \frac{\Delta\tau_x}{\Delta z \rightarrow 0} = \frac{\partial\tau_x}{\partial z}. \quad (13)$$

Далее, используя гипотезу Ньютона, напишем выражение для величины  $\tau_x$ :

$$\tau_x = \eta \frac{\partial v_x}{\partial z}. \quad (14)$$

Преобразуем уравнение (13) с учетом выражения (14) к виду

$$\frac{F_{xz}}{\Delta V' \rightarrow 0} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \eta \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}. \quad (15)$$

Аналогично, рассматривая деформацию куба в плоскости XZ, получим второй член правой части уравнения (10):

$$\frac{F_{xy}}{\Delta V' \rightarrow 0} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \eta \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}. \quad (16)$$

Для получения первого члена правой части в формуле (10) нужно рассмотреть действие нормальных напряжений  $\sigma_x$  и  $\sigma_x + \partial\sigma_x$  на грани куба, перпендикулярных относительно оси X.

Баланс сил, действующих от нормальных напряжений вдоль оси X, равен (рис. 3, в)

$$F_{\sigma x} = (\sigma_x + \partial\sigma_x) \delta y \delta z - \sigma_x \delta y \delta z = \partial\sigma_x \delta y \delta z. \quad (17)$$

Разделим выражение (17) на элемент объема куба:

$$\frac{F_{\sigma x}}{\delta V} = \frac{\partial\sigma_x \delta y \delta z}{\delta x \delta y \delta z} = \frac{\partial\sigma_x}{\delta x}. \quad (18)$$

В соответствии с экспериментальным законом Стокса [1] нормальные напряжения пропорциональны скорости линейной деформации (деформации удлинения). Без учета касательных напряжений

$$\sigma_x = \eta \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} \right), \quad (19)$$

имеем

$$\frac{F_{\sigma x}}{\delta V} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \eta \frac{\partial v_x}{\partial x} \right) = \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}. \quad (20)$$

Складывая выражения (15), (16) и (20), получаем окончательный вид правой части первого уравнения системы (1):

$$\sum \frac{F_{x\eta}}{\delta V} = \eta \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right). \quad (21)$$

Аналогичные преобразования для сил, действующих вдоль осей Y и Z, полностью определяют систему уравнений Навье-Стокса (1).

При применении тензорной алгебры к обсуждаемой проблеме между тензорами напряжений  $T$  и скоростей деформации  $S_v$  принимают прямо пропорциональную зависимость [1, 2]

$$T = \eta_1 S_v, \quad (22)$$

которая по сути является обобщением гипотезы Ньютона в виде уравнения (14); при  $\eta_1 = 2\eta$ ; здесь  $\eta$  – динамическая вязкость жидкости.

В развернутом виде формула (22) выглядит так:

$$T = 2\eta S_v = \begin{pmatrix} 2\eta \frac{\partial v_x}{\partial x} & \eta \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) & \eta \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \\ \eta \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) & 2\eta \frac{\partial v_y}{\partial y} & \eta \left( \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \\ \eta \left( \frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) & \eta \left( \frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) & 2\eta \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix}. \quad (23)$$

В результате последовательных преобразований выражения (23) к скалярному виду в декартовой системе координат получают систему уравнений Навье-Стокса (1).

**Выводы.** Уравнение Навье-Стокса можно получить исходя из анализа сил, действующих на грани элементарного кубического объема жидкости или газа, что дает наглядную физико-механическую трактовку отдельных членов этого уравнения. В результате его можно успешно использовать при решении различных металлургических и литейных задач.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Павленко В.Г. Основы механики жидкости. – Л.: Судостроение, 1988. – 240 с.
2. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. – М.: Наука, 1987. – 840 с.

© 2013 г. И.Ф. Селянин, В.Б. Деев,  
О.Г. Приходько, А.А. Куценко, В.А. Дегтярь  
Поступила 3 июня 2013 г.

УДК 669.04:536

**В.И. Бердников<sup>1</sup>, Ю.А. Гудим<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> ООО «Технология металлов» (г. Челябинск)

<sup>2</sup> Южно-Уральский государственный университет (г. Челябинск)

## АНАЛИЗ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ЖИДКИХ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ СПЛАВОВ В РЕГУЛЯРНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

**Аннотация.** Аппроксимацию экспериментальных данных по определению активности компонентов концентрированного (неразбавленного) жидкого металлического сплава следует проводить, используя в качестве основной парциальной характеристики термодинамических свойств сплава функцию  $\lg \gamma / (1-x)^2$  вместо  $\lg \gamma$ ; здесь  $\gamma$  и  $x$  – соответственно коэффициент активности и мольная доля компонента в сплаве. В этом случае интегральные термодинамические характеристики (энергия смешения, «регулярная функция») сплава будут определены с меньшей расчетной погрешностью.

**Ключевые слова:** регулярная функция, термодинамическая активность, погрешность аппроксимации.

## THERMODYNAMIC PROPERTIES ANALYSIS OF METAL ALLOYS IN REGULAR APPROXIMATION

**Abstract.** Approximation of experimental information to determine activity of components of concentrated (undiluted) liquid metal alloy should be carried out by using function  $\lg \gamma / (1-x)^2$  instead of  $\lg \gamma$  ( $\gamma$ ,  $x$  – activity coefficient and mole fraction correspondingly) as the main partial characteristic of thermodynamic properties of alloy. In this case, integral thermodynamic characteristics of alloy (mixing energy, “regular function”) will be determined with less estimated error.

**Keywords:** regular function, thermodynamic activity, approximation error.

Количество известных жидких металлических концентрированных бинарных сплавов, которые соответствуют определению «регулярный раствор», невелико (около 5 %). Для остальных же сплавов термодинамические свойства оказываются гораздо ближе к свойствам регулярных растворов, чем к свойствам идеальных [1]. Поэтому вполне оправданным является намерение про-

водить оценку термодинамических свойств бинарных, а также многокомпонентных систем, именно в приближении регулярных растворов, используя относительно простой математический аппарат этой теории.

В работе [1] для оценки свойств концентрированного бинарного сплава 1 – 2 применялась, так называемая, «регулярная» функция