необходимо обеспечение принципа неповреждения деталей, смежных с ремонтируемым узлом.

Оценка качества проведенного ремонта должна определяться на основе оценки степени улучшения технического состояния (уровня работоспособности) изделия с использованием, в том числе, методов вибродиагностики.

Дальнейшие исследования необходимо вести в направлении разработки формализованной процедуры сбора информации о фактическом состоянии оборудования с применением приборных методов технической диагностики и учета указанной информации в процедурах планирования объемов и сроков ремонтных работ, а также оценки их качества.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Диагностика и динамика прокатных станов / В.В. Веренев, В.И. Большаков, А.Ю. Путноки и др. – Днепропетровск: IMA – пресс 2007. – 144 с.
2. Кравченко В.М. Техническое обслуживание и диагностика промышленного оборудования. – Донецк: ООО «Юго – Восток, ЛТД», 2004. – 504 с.
3. Смирнов А.Н., Герике Б.Л., Муравьев В.В. Диагностирование технических устройств опасных производственных объектов. – Новосибирск: Наука, 2003. – 244 с.

© 2013 г. *В.М. Кравченко, В.А. Сидоров, В.В. Буцукин*

Поступила 16 ноября 2012 г.

УДК 669.041: 536.331.001.573

Р.П. Коптелов, Г.К. Маликов, В.Г. Лисиенко

Уральский федеральный университет

ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ УГЛОВЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ ИЗЛУЧЕНИЯ ДЛЯ ПОВЕРХНОСТНЫХ ЗОН

Аннотация. Проведено численное сравнение известных методов вычисления угловых коэффициентов при различном взаимном расположении поверхностей. Предложен простой критерий, который позволяет оценить погрешность вычисления угловых коэффициентов априори. Предложен алгоритм априорного выбора метода и количества узлов интегрирования до вычисления угловых коэффициентов. Алгоритм позволяет существенно сократить время вычисления угловых коэффициентов путем использования минимального количества узлов интегрирования, обеспечивая при этом желаемую точность для каждой конкретной пары поверхностей.

Ключевые слова: теплообмен излучением, угловые коэффициенты, интегрирование.

INTEGRATION PARAMETERS VALUATION FOR SURFACE ZONES RADIATION ANGLE COEFFICIENT COMPUTATION

Abstract. The well known methods for view factor calculation are compared numerically for various geometric arrangements. Simple criterion is introduced that allows one to estimate the error in the computed view factor a priori. The algorithm for choosing the integration method and number of nodes before calculation of a view factor is proposed. The algorithm allows one to save much computation time by always using minimum number of nodes for each pair of surface zones and insures a desired accuracy.

Keywords: radiative heat transfer, view factors, integration.

Детализированные расчеты высокотемпературных энергетических агрегатов и печей требуют все более точных моделей теплообмена излучением [1, 2]. Моделирование теплообмена излучением требует вычисления большого числа угловых коэффициентов излучения, в том числе между ограничивающими поверхностями сетки. В ряде случаев (электрические печи сопротивления, индукционный нагрев, печи с радиационными трубами и с защитной атмосферой, охлаждение на адьюстаже и др.) наличием среды между поверхностями можно пренебречь.

В отсутствие поглощающей и рассеивающей среды на пути излучения тепловой поток на поверхность i с использованием зонального метода может быть записан следующим выражением [1]:

$$Q_i = A_i \sum_{j=1}^{M} F_{ij} \int_0^{\infty} \left(J_{\lambda,i} - J_{\lambda,j} \right) d\lambda, \qquad (1)$$

где F_{ij} – угловой коэффициент между диффузными поверхностями i и j, A – площадь поверхности, M – количество поверхностей, участвующих в теплообмене, J – тепловой поток эффективного излучения, $J_{\lambda,i}$ – спектральный тепловой поток эффективного излучения, λ – длина волны излучения. Угловой коэффициент излучения F_{ij} равен доле лучистой энергии, испущенной и отраженной поверхностью i и дошедшей напрямую до поверхности j [3]. В металлургических печах с большим количеством зон может потребоваться вычисление десятков, и даже сотен тысяч угловых коэффициентов F_{ij} [4]. Это представляет наибольшую сложность при вычислении тепловых потоков и температур в большом количестве поверхностных зон печи.

Угловые коэффициенты могут быть вычислены для каждой пары поверхностей всех поверхностных зон и записаны в матричной форме. Матрица угловых коэф-

фициентов не зависит от температуры поверхностей, поэтому она может быть вычислена один раз и затем использоваться на всех дальнейших шагах для вычисления температур поверхностей и тепловых потоков на поверхности. Это важное преимущество использования угловых коэффициентов, однако здесь есть проблемы:

– вычисление угловых коэффициентов для M поверхностей имеет сложность $O(M^2)$, поэтому алгоритмы, удовлетворительные при малом числе поверхностей, могут оказаться непригодными по быстродействию при большом числе поверхностей [5];
– сложно контролировать точность вычисления. Известны два способа контроля точности вычисления угловых коэффициентов, но оба они являются эвристическими. Первый способ – использование адаптивного интегрирования. Интеграл I вычисляется два раза с разным числом узлов интегрирования n_1 и n_2, $n_2 > n_1$. Если разница между полученными значениями мала: $|I(n_1) - I(n_2)| < \varepsilon$, то в качестве значения интеграла принимают $I(n_2)$, в противном случае требуется дальнейшее увеличение числа узлов интегрирования [5]. Такой подход дает апостериорную оценку погрешности. Второй способ подходит в случае использования метода Монте-Карло. Существует приближенное правило, в соответствии с которым средняя ошибка вычисления угловых коэффициентов обратно пропорциональна корню из числа испущенных лучей. Однако это правило подходит для оценки средней погрешности, оно не позволяет оценить погрешность вычисления конкретного углового коэффициента [3].

Методы вычисления угловых коэффициентов

Здесь рассматриваются четыре метода вычисления угловых коэффициентов, описанные в работе [5].

Двукратное поверхностное интегрирование

Основная формула для углового коэффициента F_{12} определяет его через двойной поверхностный интеграл:

$$F_{12} = \frac{1}{\pi A_1} \int_{A_1} \int_{A_2} \frac{\cos(\theta_1)\cos(\theta_2)}{r^2} dA_2 dA_1, \qquad (2)$$

где A_1 и A_2 – площади поверхностей 1 и 2; θ_1 и θ_2 – углы между нормалями $\overline{n}_1$ и $\overline{n}_2$ и центрами элементарных площадок dA_1 и dA_2; r – расстояние между этими элементарными площадками (рис. 1).

Двукратное контурное интегрирование

С помощью теоремы Стокса поверхностные интегралы в формуле (2) превращаются в контурные интегралы:

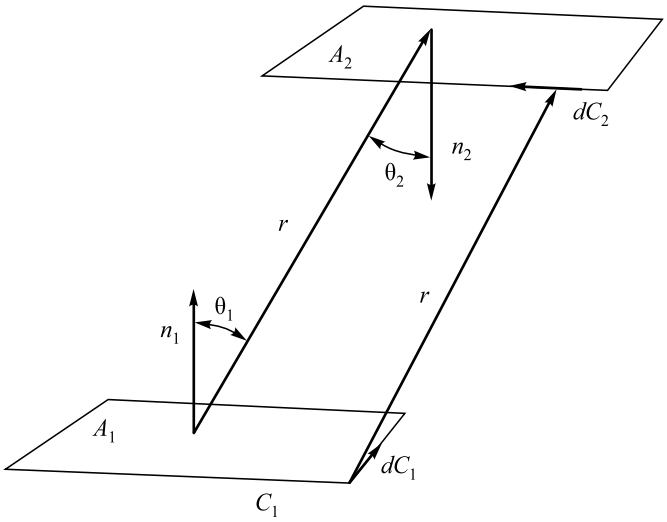


Рис. 1. Иллюстрация формул двойного поверхностного и двойного контурного интегрирования

$$F_{12} = \frac{1}{\pi A_1} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \ln(r) d\overline{c}_1 d\overline{c}_2, \qquad (3)$$

где C_1 и C_2 – граничные контуры поверхностей A_1 и A_2; $d\overline{c}_1$ и $d\overline{c}_2$ – элементарные отрезки соответствующих контуров; r – расстояние между центрами этих элементарных отрезков (рис. 1).

Однократное поверхностное интегрирование

Угловой коэффициент между бесконечно малой площадкой и площадкой конечных размеров (многоугольником) может быть вычислен по формуле, предложенной в работе [6]:

$$dF_{12} = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{NE_2} \overline{g}_j \overline{n}_1, \qquad (5)$$

где NE_2 – число ребер многоугольника; $\overline{g}_j$ – вектор с длиной, равной центральному углу с хордой, равной длине ребра многоугольника и центром на бесконечно малой площадке. Вектор $\overline{g}_j$ направлен по нормали к плоскости, образованной ребром многоугольника и точкой на площадке dA_1, $\overline{n}_1$ – нормаль к поверхности 1. Формула проиллюстрирована на рис. 2, *а*. Вычисление по этой формуле эквивалентно применению метода единичной сферы (Unit Sphere) [1].

Угловой коэффициент между двумя многоугольниками может быть вычислен путем интегрирования формулы (5):

$$dF_{12} = \frac{1}{2\pi A_1} \int_{A_1} \sum_{j=1}^{NE_2} \overline{g}_j \overline{n}_1 dA_1. \qquad (5)$$

Однократное контурное интегрирование

Один из интегралов в уравнении (3) в случае прямой линии интегрирования (ребра E) может быть вычислен аналитически [7]:

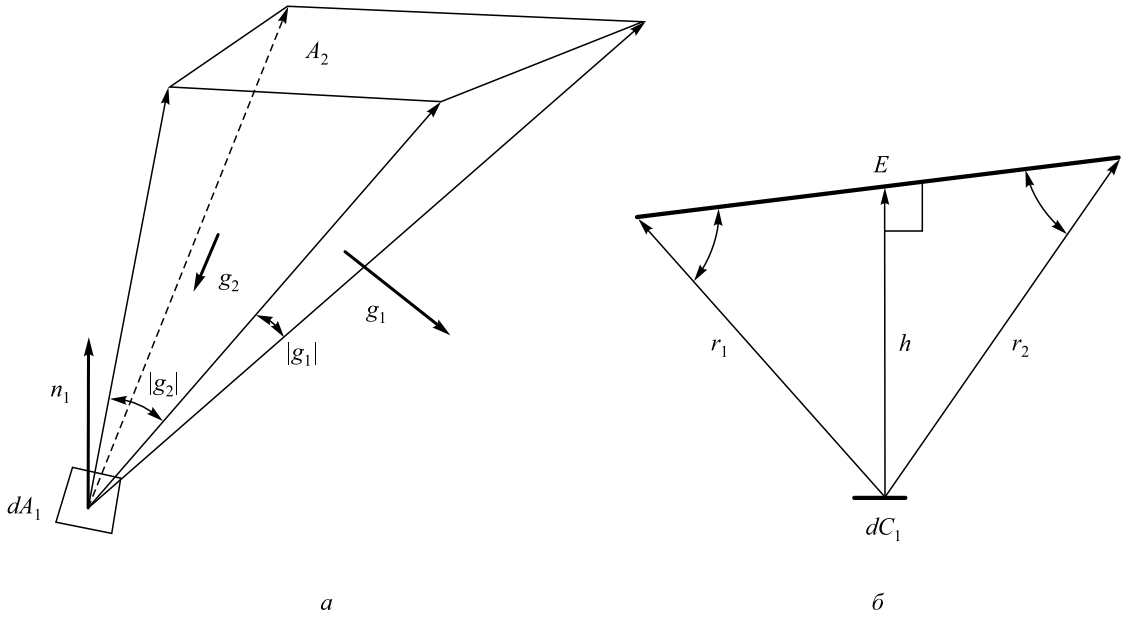


Рис. 2. Иллюстрация формул однократного поверхностного (*а*) и однократного контурного интегрирования (*б*)

$$I_2 = \int_{\bar{E}} \ln(r)\, d\bar{E} = \left[r_1 \ln r_1 \cos(r_1 \wedge E) + r_2 \ln r_2 \times \right.$$
$$\left. \times \cos(r_2 \wedge E) + h\,(r_1 \wedge r_2) - |E| \right], \qquad (6)$$

где $|E|$ – длина ребра $\bar{E}$; r_1 и r_2 – расстояния между элементарным отрезком контура $d\bar{c}_1$ и концами ребра E; $(r_1 \wedge r_2)$ – угол между векторами $\bar{r}_1$ и $\bar{r}_2$; h – длина перпендикуляра, опущенного от $d\bar{c}_1$ на линию ребра E (рис. 2, *б*). Другие записи этой формулы даны в работах [3, 5].

Аналитическое решение

Аналитическое решение двойного контурного интеграла предложено в работе [8]. Однако это решение мало подходит для практических приложений из-за высокого времени счета. Приводятся данные [5] о том, что аналитическое решение [8] в 100 раз медленнее, чем вычисление углового коэффициента по любому из четырех методов интегрирования, если по каждой переменной интегрирования используются 4 узла (например в двойном контурном интеграле используется $16 \cdot 4^2 = 256$ узлов, и в двойном поверхностном интеграле используется $4^4 = 256$ узлов).

Прочие методы

Существуют методы, наиболее подходящие для вычисления угловых коэффициентов в сложных системах с препятствиями на пути излучения, такие как метод Монте-Карло [1] и проекционные методы. Во всех проекционных методах облученная площадка/поверхность проектируется на специальную поверхность: на полусферу в методе единичной сферы, на поверхность половины куба [9], на плоскость [10] или на грани тетраэдра [11]. Полученная проекция подразделяется на «пиксели», и для каждого пикселя проверяется, на поверхность какой зоны падает энергия, прошедшая через этот пиксель. Обзор методов, использующих проектирование на полусферу, приведен в работе [12].

Также существует несколько методов, применение которых ограничено частными случаями расчетной геометрии. Метод внутренности сферы (Inside Sphere Method) подходит для расчета угловых коэффициентов между осесимметричными поверхностями [1], а методы натянутых нитей [1] и CDM (collapsed dimensions method) [13] подходят для двумерной геометрии.

Геометрический критерий для априорной оценки погрешности

Причины использования методов интегрирования

Использование методов интегрирования для вычисления угловых коэффициентов вместо аналитического решения обусловлено следующими причинами:

- На практике требуется точность вычисления угловых коэффициентов 1 – 5 % или даже 10 %. Точность вычисления тепловых потоков и температур зависит не только от точности вычисления угловых коэффициентов, но и от радиационных свойств поверхностей. Если радиационные характеристики известны с точностью до 5 %, то точное вычисление угловых коэффициентов, не сильно увеличив точность расчета температур, лишь потребует дополнительного времени.
- Приближенные методы позволяют вычислить угловые коэффициенты с достаточной точностью гораздо быстрее, чем аналитическое решение.
- Приближенные методы иногда могут быть адаптированы для расчета недиффузных угловых коэффициентов [14] и угловых коэффициентов

в сложных геометриях с препятствиями [5], для этих важных случаев аналитического решения не существует.

Одна из целей данной работы состоит в априорной оценке ошибки вычисления угловых коэффициентов. Это позволяет выбирать параметры интегрирования для каждого случая расположения поверхностей до вычисления углового коэффициента.

Зависимости между расположением поверхностей и погрешностью вычисления углового коэффициента

Двойной контурный интеграл возможно является наиболее популярным для вычисления угловых коэффициентов. Формула (3) содержит только расстояние между поверхностями, поэтому это расстояние может быть выбрано в качестве критерия для оценки погрешности методов вычисления угловых коэффициентов. Формулы двойного поверхностного интеграла и однократного контурного интеграла также содержат расстояние между точками поверхностей. Другой возможный параметр для оценки погрешности – взаимный наклон поверхностей, однако для него в данной работе не было найдено связи с погрешностью вычисления.

Угловые коэффициенты для двух коаксиальных единичных квадратов были вычислены с помощью двойного контурного интеграла (рис. 3). Видно, что относительная ошибка быстро уменьшается при увеличении расстояния между квадратами (их плоскостями). Даже для близко расположенных квадратов угловой коэффициент может быть получен с высокой точностью. Эти факты соответствуют результатам другого исследования [5]. В случае многоугольников, лежащих в параллельных плоскостях, расстояние между многоугольниками является расстоянием между их плоскостями, однако для произвольно расположенных многоугольников понятие «расстояние между многоугольниками» не определено. Можно предложить использовать минимальное расстояние между многоугольниками, которое меньше, чем расстояние между любыми другими двумя точками, принадлежащими этим многоугольникам. Поэтому, если элементарный угловой коэффициент между ближайшими точками будет найден с заданной точностью, то средний угловой коэффициент будет найден даже с большей точностью.

Однако данный критерий имеет некоторые недостатки:

– Вычисление минимального расстояния необходимо для каждой пары многоугольников, т.е. M^2 значений должно быть вычислено.
– Вычисление минимального расстояния между двумя многоугольниками является нетривиальной задачей. Минимальное расстояние – это расстояние между ближайшими точками, однако расположение этих точек зависит от взаимного расположения многоугольников. Эти точки могут находиться в углах многоугольников, на их ребрах, внутри многоугольников или в комбинации этих способов (рис. 4). Поэтому вычисление минимального расстояния между многоугольниками может занять времени даже больше, чем само вычисление углового коэффициента, если используется небольшое число узлов интегрирования.

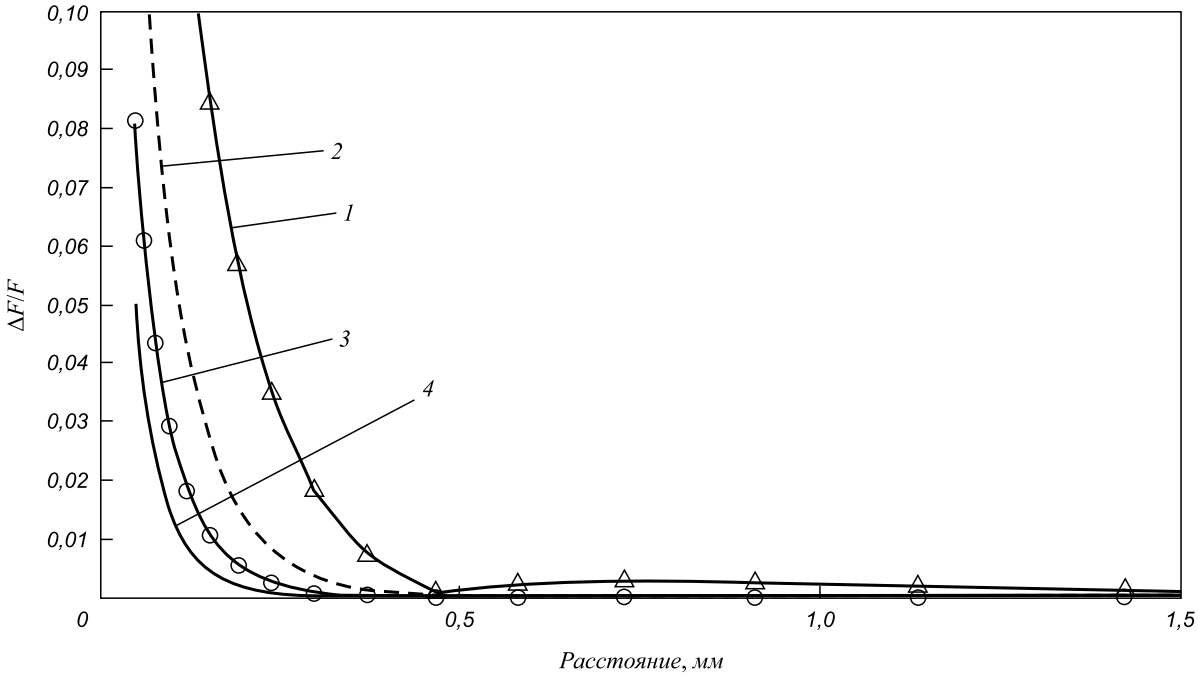
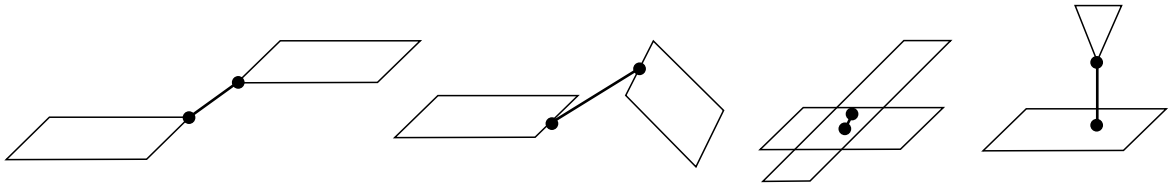


Рис. 3. Относительная погрешность вычисления углового коэффициента для двух единичных коаксиальных квадратов: *1* – $n = 2$; *2* – $n = 3$; *3* – $n = 4$; *4* – $n = 5$



а *б* *в* *г*

Рис. 4. Расположение ближайших точек на двух многоугольниках:
а – в углах многоугольников; *б* – на ребрах; *в* – внутри; *г* – комбинация (*а*) и (*в*)

Эффективное расстояние (ЭР) между многоугольниками

В данном разделе предлагается критерий взаимного расположения многоугольников, который лишен недостатков, присущих критерию минимального расстояния. Пусть для каждого многоугольника вычислен центр и радиус ограничивающей сферы. Любой многоугольник может быть заключен в эту сферу, но не все его вершины могут лежать на ее поверхности, иными словами это не описанная сфера. Простой алгоритм вычисления ограничивающей сферы показан в работе [15]. Вычисленная сфера получается в среднем на 5 % больше, чем минимальная ограничивающая сфера. Алгоритм выполняется в два прохода. В первом проходе находятся две сильно удаленные друг от друга точки (не обязательно максимально удаленные). Начальная сфера строится так, чтобы эти две точки были концами ее диаметра. Во втором проходе проверяется, принадлежит ли точка сфере, и, если нет, то сфера расширяется так, чтобы включить в себя эту точку.

Введем эффективное расстояние между двумя многоугольниками (или любыми другими фигурами) как расстояние между центрами ограничивающих сфер, деленное на сумму радиусов этих сфер (рис. 5): ЭР = $|O_2 - O_1| / |R_1 + R_2|$.

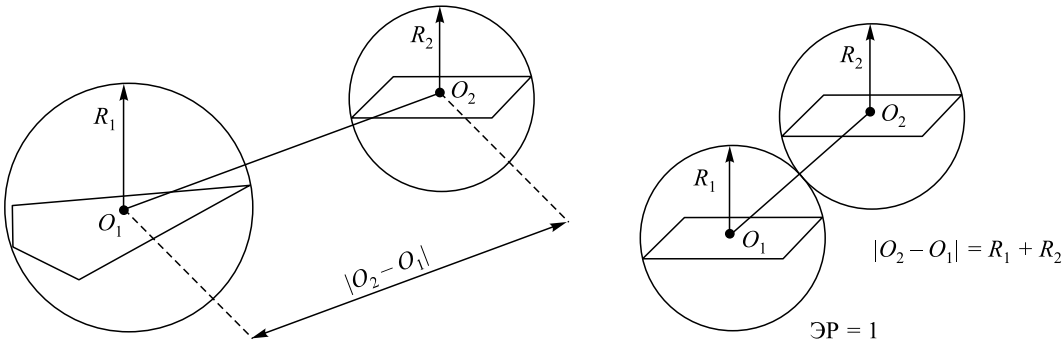
Введенный критерий имеет следующие преимущества: расстояние между центрами сфер характеризует среднее расстояние между многоугольниками, критерий безразмерный, вычисление ограничивающей сферы проще, чем вычисление минимального расстояния; вычисление ограничивающей сферы нужно проводить только для каждой поверхности, т.е. лишь M сфер должно быть вычислено вместо M^2. Для каждой пары поверхностей необходимо только вычисление по простейшей формуле: ЭР = $|O_2 - O_1| / |R_1 + R_2|$.

Схема численного экспертимента

Погрешность вычисления углового коэффициента зависит от расстояния между плоскостями для случая двух коаксиальных квадратов (см. рис. 3). Однако для практического использования необходимо иметь подобную зависимость для произвольных четырехугольников, так как во многих случаях четырехугольники являются элементами поверхности конечно-разностной сетки. В данной работе множество угловых коэффициентов было вычислено для произвольно расположенных четырехугольников и проанализирована связь между введенным критерием ЭР и точностью вычислений.

Четырехугольники генерировались следующим образом. Использовались четыре базовых четырехугольника (рис. 6): единичный квадрат (*а*), прямоугольник (*б*) и два параллелограмма с разными длинами сторон и углом 60° (*в*, *г*). Такие четырехугольники часто получаются при разбиении модели печи на зоны.

Угловые коэффициенты рассчитывались для пар четырехугольников одинаковой формы. Первый четырехугольник располагался в плоскости $z = 0$ и не преобразовывался в дальнейшем. Его площадь всегда устанавливалась равной единице, а центр находился в



а *б*

Рис. 5. Геометрическая иллюстрация критерия эффективного расстояния:
а – общий случай; *б* – частный случай. ЭР = 1, если сферы касаются друг друга

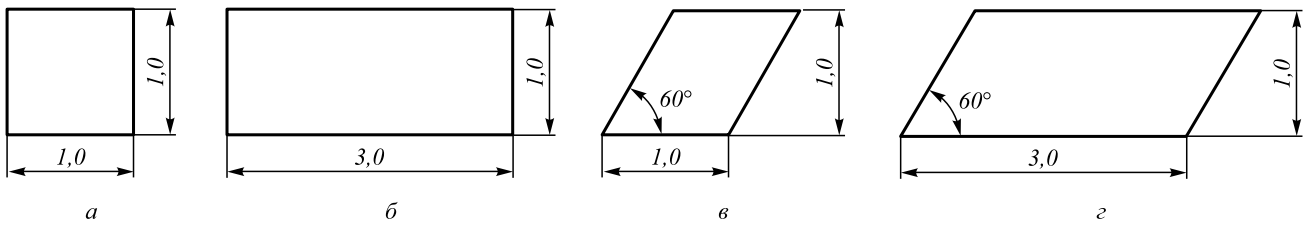


Рис. 6. Различные четырехугольники

начале координат. Второй четырехугольник преобразовывался в другой четырехугольником той же формы, но с другим размером, смещением относительно начала координат и наклоном (рис. 7).

Был использован набор коэффициентов масштабирования: 0,1; 0,5; 1,0; 2,0; 10,0. Смещение по вертикали производилось на значения: 0,1; 0,13 … 8,7 – всего 18 значений, которые составляют геометрическую прогрессию с шагом 1,3. Смещение по вертикали всегда больше нуля, поэтому четырехугольники не лежат в одной плоскости. Смещение по горизонтали вдоль оси x производилось на те же значения, за исключением первого значения, которое устанавливалось равным нулю. Четырехугольник вращался вокруг осей x и z. Угол поворота вокруг каждой оси варьировался от 0 до $\pi/2$ с шагом $\pi/18$. Коэффициент масштабирования, вертикальное и горизонтальное смещение, а также углы поворота варьировались независимо друг от друга. Полное число различных взаимных расположений четырехугольников равно $5\cdot10^5$.

Результаты численного эксперимента

Угловые коэффициенты для множества четырехугольников были вычислены с использованием четырех методов: двойного поверхностного интегрирования, однократного поверхностного интегрирования, двойного контурного интегрирования и однократного контурного интегрирования. Везде использовались квадратурные формулы Гаусса (произведение одномерных формул). Здесь n – количество узлов интегрирования по одной координате интегрирования, т.е. полное число узлов N равно $16n$ в однократном контурном интеграле, n^2 в однократном поверхностном интеграле, $16n^2$ в двойном контурном интеграле и n^4 в двойном поверхностном интеграле.

На рис. 8 показаны достигаемые значения относительной погрешности при использовании двойного контурного интеграла при $n = 3$ ($N = 16\cdot9 = 144$).

Видно, что погрешность уменьшается при увеличении ЭР. Можно найти значения ЭР: ЭР(10 %), ЭР(5 %), ЭР(2 %) и ЭР(1 %) такие, что, если $ЭР_{ij}$, вычисленный для пары четырехугольников i, j больше, чем, например, ЭР(5%), то погрешность априори может быть оценена меньшей, чем 5 %, так как это выполняется для всевозможных взаимных расположений четырехугольников (см. рис. 8). Другими словами, устанавливаются следующие соотношения:

$$ЭР_{ij} < ЭР(10\ \%) \rightarrow \Delta F_{ij}/F_{ij} < 10\ \%, \quad (7)$$

$$ЭР_{ij} < ЭР(5\ \%) \rightarrow \Delta F_{ij}/F_{ij} < 5\ \%, \quad (8)$$

$$ЭР_{ij} < ЭР(2\ \%) \rightarrow \Delta F_{ij}/F_{ij} < 2\ \%, \quad (9)$$

$$ЭР_{ij} < ЭР(1\ \%) \rightarrow \Delta F_{ij}/F_{ij} < 1\ \% \quad (10)$$

и так далее для любой точности.

Значения ЭР(10 %), ЭР(5 %), ЭР(2 %) и ЭР(1 %) определены при различном числе узлов интегрирова-

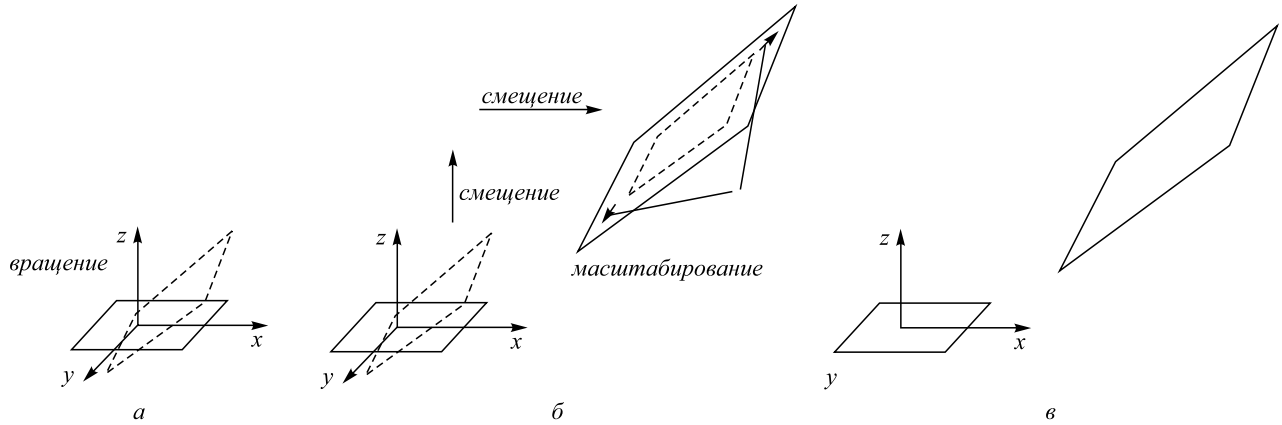


Рис. 7 Преобразование над вторым многоугольником:
а – вращение; *б* – сдвиг и масштабирование; *в* – конечное положение после преобразований

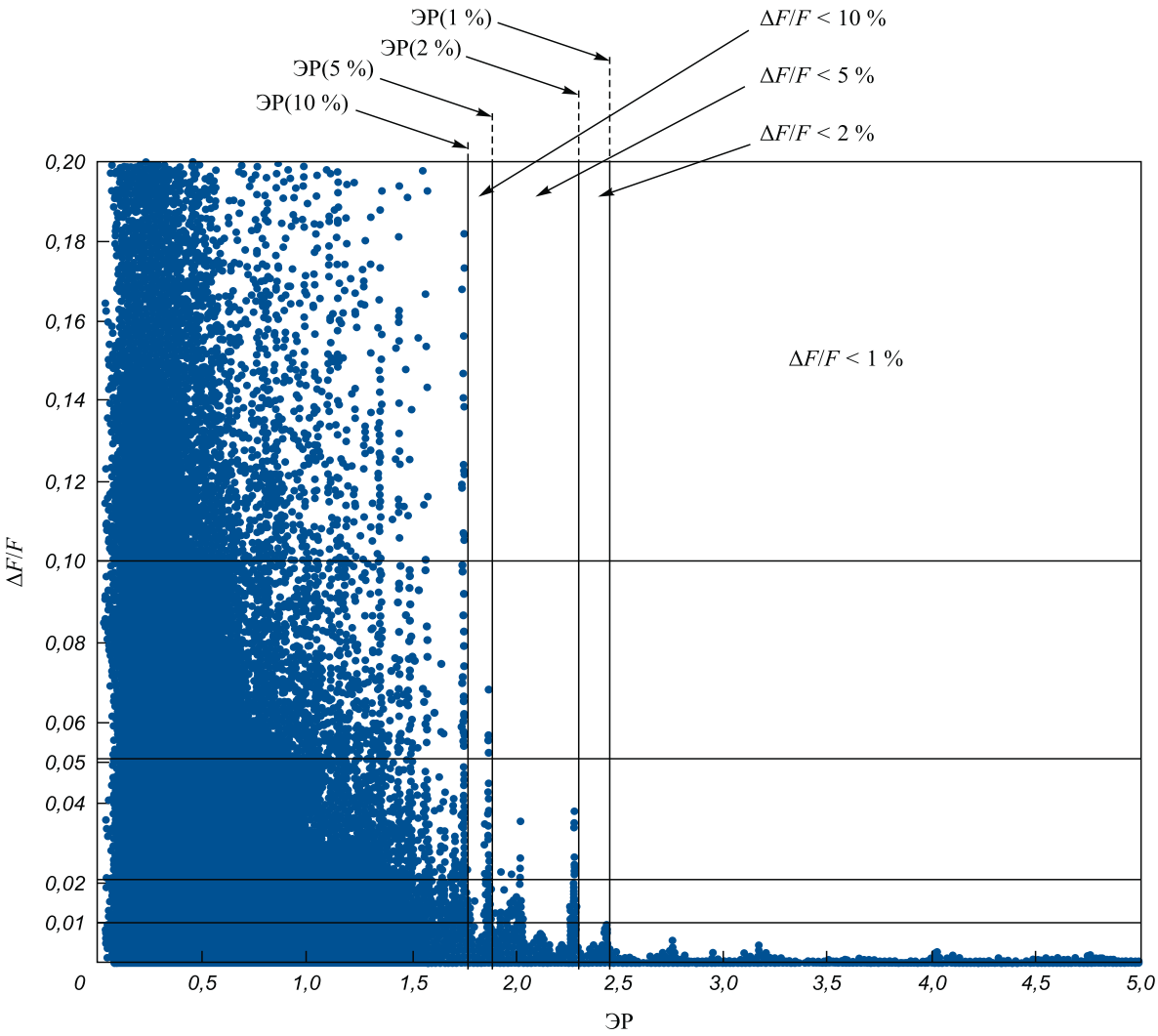


Рис. 8. Зависимость между относительной погрешностью вычисления углового коэффициента и ЭР. Каждая точка представляет один из $5 \cdot 10^5$ угловых коэффициентов. Для анализа использовались только угловые коэффициенты со значением больше 10^{-4}

ния в четырех методах (табл. 1). В первых трех методах при расчетах использовалась одинарная точность (числа по 4 байта), однако такой точности недостаточно при использовании однократного контурного интеграла. Когда в однократном контурном интеграле использовалась одинарная точность, невозможно было получить погрешность меньше 10 % даже при большом числе узлов. Поэтому в однократном контурном интеграле использовалась двойная точность.

В качестве точных значений угловых коэффициентов были взяты значения, полученные с помощью однократного контурного интегрирования при $n = 40$ с двойной точностью. Все вычисления были реализованы на Фортране и исполнялись на процессоре Pentium II 1.83 GHz.

Используя соотношения (7 – 10) и данные табл. 1, можно сформулировать алгоритм выбора метода интегрирования и количества узлов:

– Для всех угловых коэффициентов выбирается желаемая точность x %. Это означает, что в табл. 1 выбирается соответствующая колонка.
– Для всех поверхностей вычисляется ограничивающая сфера.
– Для каждой пары четырехугольников i, j вычисляется значение $ЭР_{ij}$. Для каждого метода находится такое минимальное значение n, при котором будет выполняться требование по точности: $ЭР(x\ \%, n) \le ЭР_{ij} \le ЭР\ (x\ \%, n + 1)$. Левая часть неравенства позволяет выполнить требования по точности, а правая часть приводит к использованию минимального числа узлов.
– Имея четыре значения n для четырех методов и значения времени, которое требуется на вычисление по каждому из методов, можно выбрать самый быстрый метод для вычисления углового коэффициента F_{ij}.

Из табл. 1 видно, что точность результатов сильно зависит от введенного критерия ЭР, и угловые коэффициенты можно вычислять, используя, в основном, небольшое число узлов интегрирования. Критерий ЭР подходит для большинства возможных расположений поверхностей, однако одновременно приводит и к не-

Таблица 1

Значения эффективного расстояния, которые позволяют вычислить угловой коэффициент с заданной точностью

Метод вычисления	n, число узлов в одномерном интеграле	N, полное число узлов интегрирования	Время расчета 10^6 угловых коэффициентов, с	ЭР (10 %)	ЭР (5 %)	ЭР (2 %)	ЭР (1 %)
Двойной поверхностный интеграл	1	$1^4 = 1$	0,66	4,10	6,20	7,40	9,20
	2	$2^4 = 16$	2,04	1,55	2,00	2,60	2,95
	3	$3^4 = 81$	5,92	1,20	1,35	1,55	1,60
	4	$4^4 = 256$	15,02	1,05	1,20	1,20	1,35
	5	$5^4 = 625$	32,76	0,9	1,05	1,05	1,20
	6	$6^4 = 1296$	64,14	0,80	0,90	1,00	1,05
Однократный поверхностный интеграл	1	$1^2 = 1$	1,86	3,60	5,10	8,40	10,20
	2	$2^2 = 4$	6,89	1,55	2,00	2,60	2,95
	3	$3^2 = 9$	15,13	1,20	1,35	1,55	1,60
	4	$4^2 = 16$	26,65	1,05	1,20	1,20	1,35
	5	$5^2 = 25$	41,51	0,90	1,05	1,05	1,20
	6	$6^2 = 36$	59,74	0,80	0,90	1,00	1,05
Двойной контурный интеграл	1	$16 \cdot 1^2 = 16$	3,33	6,30	6,65	8,70	9,10
	2	$16 \cdot 2^2 = 64$	7,41	2,45	3,20	3,20	3,70
	3	$16 \cdot 3^2 = 144$	13,75	1,80	1,90	2,30	2,30
	4	$16 \cdot 4^2 = 256$	22,37	1,35	1,45	1,45	1,80
	5	$16 \cdot 5^2 = 400$	33,35	1,05	1,15	1,35	1,35
	6	$16 \cdot 6^2 = 576$	46,69	1,05	1,05	1,05	1,15
Однократный контурный интеграл	1	$16 \cdot 1 = 16$	10,22	6,25	6,65	8,70	9,10
	2	$16 \cdot 2 = 32$	18,07	2,25	2,25	2,95	3,35
	3	$16 \cdot 3 = 48$	25,86	1,50	1,50	1,75	2,00
	4	$16 \cdot 4 = 64$	33,59	0,90	1,05	1,15	1,35

достатку этого критерия. Чтобы выполнить требования по точности во всех возможных случаях, значения ЭР получаются завышенными. Для частных случаев значения ЭР могут быть намного ниже. Например, радиусы ограничивающих сфер для двух коаксиальных квадратов равны $R_1 = R_2 = 1/\sqrt{2}$. Если квадраты находятся на расстоянии, равном единице, то ЭР = $\sqrt{2}/2 \approx 0{,}71$. В этом случае точность 10 % не может быть достигнута, судя по табл. 1. Однако рис. 3 показывает, что на самом деле даже $n = 2$ достаточно, чтобы получить точность 1 %. Это означает, что минимальное число узлов, которое получается по табл. 1 при ЭР > 1, не может быть определено при ЭР < 1, особенно если необходима точность 1 %.

Определим долю угловых коэффициентов, для которых можно с помощью данной таблицы определить достаточное количество узлов. Если ЭР > 1 для двух четырехугольников, то угловой коэффициент может быть вычислен любым из четырех методов при небольшом числе узлов. Отметим, что ЭР = 1, если ограничивающие сферы четырехугольников касаются друг друга (см. рис. 5, *б*). Следовательно ЭР > 1, если ограничивающие сферы не пересекаются и не касаются. Тогда предложенный алгоритм подходит для всех пар четырехугольников, ограничивающие сферы которых не пересекаются. Доля таких четырехугольных поверхностей может быть оценена, исходя из следующего упрощения: ограничивающие сферы двух поверхностей пересекаются, только если поверхности являются соседними, т.е. имеют общее ребро. Для каждой из M поверхностей только 8 поверхностей являются соседними. Для каждой поверхности нужно вычислить $M - 1$ угловых коэффициентов: 8 с соседними поверхностями и $(M - 1) - 8 = M - 9$ с остальными поверхностями, с которыми у данной поверхности ЭР > 1. Итак, $(M - 9)/(M - 1)$ угловых коэффициентов могут быть эффективно вычислены по предложенному алгоритму, и только для $8/(M - 1)$ угловых коэффициентов нужен другой алгоритм. Соответствующие доли угловых коэффициентов представлены в табл. 2. Можно видеть, что предложенный алгоритм подходит более, чем для 90 % угловых коэффициентов, если модель состоит из 100 поверхностей, и более чем для 99 %, если модель состоит из 1000 поверхностей. Соседние поверхности составляют малую долю от всех пар поверхностей, и только для них требуется использовать квадратурные формулы высокого порядка или аналитическое решение.

Таблица 2

Доли угловых коэффициентов, которые могут или не могут быть эффективно вычислены с использованием предложенного алгоритма

Доля / Число поверхностей	30	50	100	150	200	400	1000
$(M-9)/(M-1)$, % (могут)	72,4	83,7	91,9	94,6	96,0	98,0	99,2
$8/(M-1)$, % (не могут)	27,6	16,3	8,1	5,4	4,0	2,0	0,8

Выводы. Проведено численное сравнение различных методов вычислений угловых коэффициентов излучения между четырехугольными поверхностями для их различных геометрических расположений. Для каждого из четырех методов вычисления и для каждого фиксированного числа узлов интегрирования было рассчитано более $2 \cdot 10^5$ угловых коэффициентов.

Результаты показали, что точность вычислений углового коэффициента может быть априори оценена с помощью одного простого параметра – эффективного расстояния. Это позволяет априори выбирать минимальное число узлов интегрирования для каждой пары четырехугольников, благодаря чему в несколько раз сокращается время вычисления матрицы угловых коэффициентов и достигается желаемая точность.

Предложенный алгоритм выбора числа узлов интегрирования хорошо подходит для площадок с ЭР ≥ 1. Для площадок с ЭР < 1 (площадки, имеющие общее ребро) необходимо использовать интегрирование с гораздо большим числом узлов, однако практика моделирования показывает, что для большинства случаев металлургических печей площадки с ЭР < 1 составляют лишь 1 – 10 % общего числа пар излучающих площадок.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Modest M.F. Radiative heat transfer. – New York: Academic press, 2003. – 822 p.
2. Лисиенко В.Г. Совершенствование и повышение эффективности энерготехнологий и производств. Интегрированный энерго-экологический анализ: теория и практика. Т. 1. – М.: Теплотехник, 2010. – 688 с.
3. Emery A.F., Johansson O., Lobo M., Abrous A. // ASME journal of heat transfer. 1991. No. 113. P. 413 – 422.
4. Маликов Г.К., Лисиенко В.Г., Коптелов Р.П. // Изв. вуз. Черная металлургия. 2010. № 7. С. 53 – 59.
5. Walton G.N. Calculation of obstructed view factors by adaptive integration. Washington, National institute of standards and technology – NISTIR 6925. 2002. – 20 p.
6. Hottel H.C., Sarofim A.F. Radiative Transfer. – New York: McGraw-Hill. 1967. – 410 p.
7. Mitalas G.P., Slephenson D.G. Fortran IV programs to calculate radiant interchange factors. NRC of Canada, Ottawa, DBR-25. 1966. – 30 p.
8. Schroder P., Hanrahan P. A closed form expression for the form factor between two polygons. Department of computer science, Princeton university, technical report CS-404-93. 1993. – 12 p.
9. Cohen M.F., Greenberg D.P. // ACM SIGGRAPH. 1985. No. 19(3). P. 31 – 40.
10. Recker R.J., George D.W., Greenberg, D.P. // Computer Graphics. 1990. No. 24(2). P. 59 – 66.
11. Beran-Koehn J.C., Pavicic M.J. Delta Form Factor Calculations for the Cubic Tetrahedral Algorithm. Graphics Gems III. – New York: Academic Press, 1992. P. 324 – 328.
12. Kim S., Yoon K. An alternative to the hemicube algorithm for computing form factor. // International conference Graphicon. Moscow, 2000.
13. Subhash C.M., Shukla A., Yadav V. // International communications in heat and mass transfer. 2008. No. 35(5). P. 630 – 636.
14. DiLaura D.L., Proc. 33-rd. National heat transfer conf. Albuquerque. 1999. P. 99 – 107.
15. Glassner A.S. Graphics Gems I. – New York: Academic Press, 1990. P. 301 – 303.

© 2013 г. *Р.П. Коптелов, Г.К. Маликов, В.Г. Лисиенко*

Поступила 31 июля 2012 г.