



УДК 539.5;621.74

DOI 10.17073/0368-0797-2025-4-372-382



Оригинальная статья
Original article

МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОПТИМИЗАЦИЯ ВЛИЯНИЯ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ШВОВ НА НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ СФЕРИЧЕСКИХ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ ЛИТЕЙНЫХ ФОРМ

А. И. Евстигнеев[✉], Д. В. Чернышова, В. И. Одинокоев, Э. А. Дмитриев,
А. А. Евстигнеева, Ю. Б. Колошенко, Д. А. Потянихин

Комсомольский-на-Амуре государственный университет (Россия, 681013, Хабаровский край, Комсомольск-на-Амуре, пр. Ленина, 27)

✉ diss@knastu.ru

Аннотация. Задачей настоящего теоретического исследования является оценка влияния кольцевых температурных швов на внутренней поверхности литейной металлической сферической формы на уровень напряженно-деформированного состояния (НДС) в ней при кристаллизации стальной отливки. Специфика данного технологического процесса состоит в геометрической форме (сфера) литейной модели, когда кристаллизующийся металл создает во внутренней поверхности литейной формы (в первые мгновения) значительные сжимающие напряжения, которые усиливаются кривизной формы: внутренний слой формы, нагреваясь, пытается увеличиться в объеме, но этому препятствуют не только более холодные внешние слои, но и кривизна самого поверхностного слоя. Рассматриваются два варианта применения литейной формы: со швами и без них. Формулируется задача оптимизации конструктивных параметров температурных швов (выточек) от величины возникающих в литейной форме нормальных напряжений в начальной стадии кристаллизации стальной отливки. При решении задачи используются уравнения линейной теории упругости, уравнения теплопроводности и апробированный численный метод. Приведена численная схема и разработанный алгоритм решения задачи. Оценка трещиностойкости проводится по величине нормальных напряжений в металлической сферической форме. Найденные в результате решения тестовой задачи оптимальные конструктивные варианты (схемы) литейной сферической металлической формы зависят от расположения температурных швов в оболочковой форме, значений напряжений в них в условиях целевой функции min-max и разработанного алгоритма. Результаты решения задачи представлены графически в виде эпюр напряжений и температур по исследуемой области в разных сечениях и временах охлаждения ОФ и нарастающей корочки металла. Дан анализ полученных результатов стойкости металлической сферической литейной формы.

Ключевые слова: металлическая литейная форма, отливка, напряженно-деформированное состояние, моделирование, оптимизация

Благодарности: Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-29-00214, <https://rscf.ru/project/24-29-00214/>.

Для цитирования: Евстигнеев А.И., Чернышова Д.В., Одинокоев В.И., Дмитриев Э.А., Евстигнеева А.А., Колошенко Ю.Б., Потянихин Д.А. Моделирование и оптимизация влияния температурных швов на напряженно-деформированное состояние сферических металлических литейных форм. *Известия вузов. Черная металлургия*. 2025;68(4):372–382. <https://doi.org/10.17073/0368-0797-2025-4-372-382>

MODELING AND OPTIMIZATION OF THE EFFECT OF TEMPERATURE SEAMS ON STRESS-STRAIN STATE OF SPHERICAL METAL CASTING MOLDS

A. I. Evstigneev[✉], D. V. Chernyshova, V. I. Odínokov, E. A. Dmitriev,
A. A. Evstigneeva, Yu. B. Koloshenko, D. A. Potyanikhin

Komsomolsk-on-Amur State University (27 Lenina Ave., Komsomolsk-on-Amur, Khabarovsk Territory 681013, Russian Federation)

✉ diss@knastu.ru

Abstract. The objective of this theoretical study is to evaluate the effect of annular temperature seams in the inner surface of a spherical metal casting mold on the level of stress-strain state (SSS) in it during crystallization of a steel casting. The specificity of this technological process consists in the geometric shape (sphere) of the casting model, when the crystallizing metal creates significant compressive stresses in the inner surface of the mold (in the first moments), which are enhanced by the mold curvature: the mold inner layer, heating up, tries to increase in volume, but this is prevented not only by the cooler outer layers, but also by curvature of the surface layer itself. Two possible applications of the casting mold are being considered: with and without seams. The problem of optimizing the design parameters of temperature seams (recesses) is formulated. It depends on the magnitude of the normal stresses occurring in the casting mold at the initial stage of the steel casting crystallization. When solving the problem, the equations of the linear theory of elasticity, the equations of thermal conductivity and the proven numerical method are used. The paper presents a numerical scheme and a developed algorithm for solving the problem. Crack resistance was estimated based on the magnitude of normal stresses in a spherical metal mold. The optimal design options (schemes) of a spherical metal casting mold found as a result of solving the test problem depend on location of the temperature seams in the shell mold, the stress values in them under conditions of the min-max objective function and the developed algorithm. The results of solving the problem are presented graphically in the form of plots of stresses and temperatures in the studied area in different sections and periods of cooling of the shell mold and the metal growing crust. The obtained results of resistance of a metal spherical casting mold were analyzed.

Keywords: metal casting mold, casting, stress-strain state, modeling, optimization

Acknowledgements: The research was supported by the Russian Science Foundation, grant No. 24-29-00214, <https://rscf.ru/project/24-29-00214/>.

For citation: Evstigneev A.I., Chernyshova D.V., Odínokov V.I., Dmitriev E.A., Evstigneeva A.A., Koloshenko Yu.B., Potyanikhin D.A. Modeling and optimization of the effect of temperature seams on stress-strain state of spherical metal casting molds. *Izvestiya. Ferrous Metallurgy*. 2025; 68(4):372–382. <https://doi.org/10.17073/0368-0797-2025-4-372-382>

ВВЕДЕНИЕ

Металлические литейные формы широко применяются в литейном производстве в различных методах литья, например, при литье в кокиль, центробежном литье, литье под давлением, непрерывном литье, жидкой штамповке и др. Основным недостатком этих методов литья является малая долговечность работы металлических форм вследствие внешних силовых и температурных воздействий на них. Такие воздействия приводят к повышенному уровню напряженно-деформированного состояния (НДС) в формах, которые могут разрушаться, или к нарушению геометрии формы от возникающих температурных напряжений. Для снижения такого влияния в производстве применяют различные технологические и конструктивные решения.

Как показывает анализ литературных источников и производственный опыт, на стойкость литейных форм большое влияние оказывает геометрия получаемой в ней отливки. Наиболее непредсказуемой (с точки зрения стойкости литейной формы) является сферическая (шарообразная) форма отливки.

В действующем литейном производстве шарообразных отливок применяются различные типы литейных форм, а именно, разовые песчано-глинистые, керами-

ческие и разъемные металлические. Такие литейные формы подвергаются различным внешним силовым и температурным воздействиям, которые могут приводить к разрушению форм или сокращению их работоспособности.

Авторами работы [1] высказано теоретическое предположение и найдено принципиально новое технологическое решение¹ по повышению стойкости сферической керамической оболочковой формы (ОФ) за счет выполнения на ее внутренней поверхности температурных швов. Идея такого технологического решения найдена в результате анализа известного в литейном производстве метода снижения термических напряжений в отливках за счет использования так называемых «ребер жесткости» [2], а в рассматриваемом случае – температурных швов (выточек). Температурный шов представляет собой кольцевую выточку на внутренней поверхности литейной ОФ.

Эволюция НДС металлической литейной формы при литье в кокиль рассматривается в работах [3; 4].

¹ Пат. № 2828801 Литейная многослойная оболочковая форма / В.И. Одинок, А.И. Евстигнеев, Э.А. Дмитриев, Д.В. Чернышова, Ю.И. Ткачева, А.Н. Намоконов Заявл. 05.03.2024; опубл. 21.10.2024. Бюл. № 30.

Расчет НДС кокилей осуществляется методом конечных элементов [3] в два этапа: решение задачи теплопроводности и решение задачи упруго-пластической деформации с использованием найденных температурных полей. Расчетные данные позволили спроектировать и внедрить в производство новые, более стойкие чугунные изложницы меньшей массы.

В работе [4] представлены данные по численному моделированию процессов формирования отливок в металлических формах. В качестве методической основы численного моделирования принят метод конечных разностей в варианте явной разностной схемы. Для реализации метода численного моделирования явлений теплопереноса в рассматриваемой системе тел использовалась прямоугольная пространственная сетка в пределах поддона. Шаги сетки в пределах формирующейся отливки, а также для стенки формы и слоя утеплителя сочетались с теплофизическими свойствами поддона для обеспечения условий гомохромности. Устойчивость расчета сохранялась благодаря принятому шагу по времени $\Delta t \leq 30$ с, при котором число Фурье не превышает своего граничного значения. Задача решалась как двумерная.

Результаты моделирования НДС в затвердевающей стальной отливке [5; 6] позволили спрогнозировать образование в ней трещин, развитие которых зависит не только от температурных полей и связанных с ними тепловых напряжений и деформаций, но и от локализации усадочной пористости.

В работе [7] получено общее выражение, позволяющее рассчитать усадку и термические напряжения в упруго-пластическом диске, обусловленные круговым источником тепла, для произвольного нелинейного закона упрочнения, а также рассчитать упругую разгрузку упруго-пластического диска.

В работе [8] изучены упруго-пластические и остаточные напряжения в толстостенном сферическом сосуде под внешним гидростатическим давлением. В результате исследований был разработан процесс, позволяющий создавать благоприятные остаточные напряжения при сжатии во внутренней части цилиндрических и сферических сосудов.

Предметом работы [9] была функционально-градиентная полая сфера со сферической изотропией, подверженная внутреннему давлению. Целью работы являлась реализация благоприятного распределения напряжений в полой сфере, подверженной внутреннему давлению, для пластичного и хрупкого поведения материала.

В работе [10] рассмотрена переходная термоупругая задача, включающая многослойный полый цилиндр с кусочно-степенной неоднородностью из-за асимметричного нагрева с его поверхностей. Было исследовано влияние функциональной градации на термические напряжения.

Решалась численная задача в программном комплексе ANSYS Mechanical для двухслойной толстостен-

ной сферической оболочки при температурно-силовом воздействии [11].

Решение задачи для напряжений и смещений в толстой сферической оболочке, подверженной внутренним и внешним нагрузкам давления, представлено в работе [12].

На основе теории плоской упругости определены компоненты смещения и напряжения в толстостенных сферических сосудах высокого давления, изготовленных из неоднородных материалов, подвергающихся внутреннему и внешнему давлению [13]. Исследуется влияние неоднородности материала на упругие деформации и напряжения.

Оптимизация конструкции для трехслойного цилиндра с термоусадкой из разных материалов, подвергающегося очень высокому давлению, исследовалась в работе [14].

В работе [15] проведено моделирование осесимметричной многослойной оболочки. Решена задача о плоской деформации для цилиндра, окруженного кольцевыми слоями. Показано численное решение для изучения зависимости распределения остаточных напряжений от свойств материала в процессе охлаждения.

В работе [16] исследовано влияние величины угла охвата поверхности сферической керамической ОФ опорным наполнителем (ОН) на уровень НДС в ней при получении стальной шарообразной отливки. Сформулирована задача по оптимизации стойкости сферической керамической ОФ от угла охвата ее ОН при затвердевании и охлаждении в ней стальной шарообразной отливки в условиях целевой функции $\min - \max$. Оценка трещиностойкости ОФ проводилась по величине нормальных напряжений в ней.

Для теоретического моделирования процесса эволюции НДС в форме на начальном этапе процесса охлаждения использованы уравнения линейной теории упругости, уравнения теплопроводности и апробированный численный метод [17], который широко применяется для решения других задач подобного рода.

Моделирование и оптимизация смежных вопросов в других различных процессах исследовались в работах [18; 19].

Целью работы [18] является создание эффективного численного алгоритма решения осесимметричных обратных задач проектирования средств тепловой маскировки (многослойных сферических маскировочных оболочек) и анализ результатов проведенных вычислительных экспериментов. В качестве процедуры численной оптимизации при решении данных задач применен оптимизационный метод роя частиц, предложенный в работе [20].

В работе [19] исследуется вопрос о пластической неустойчивости тонкостенного сферического сосуда из материала с пластической ортотропией, нагруженного внутренним импульсным давлением. С использо-

ванием программного обеспечения Mathematica установлено влияние скорости деформации и параметра пластической ортотропии на значение деформации, при котором возникает неустойчивость.

В настоящей работе анализируется стойкость сферической металлической литейной формы при кристаллизации в ней стальной отливки, а именно, развивается найденное ранее для керамических сферических ОФ технологическое решение уменьшения величины нормальных напряжений (по модулю) в сечении сферической ОФ путем упорядоченного расположения в ней выточек. Решается задача по нахождению оптимальной конструкции металлической формы сферической конфигурации, способной выдержать температурный перепад на начальном этапе процесса охлаждения при заливке в нее жидкой стали. Стойкость формы такой конфигурации имеет большое значение при изготовлении шарообразных отливок, применяемых в многочис-

ленных конструкциях и имеющих высокие требования к точности изготовления.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается осесимметричное тело вращения (рис. 1), имеющее в меридианном сечении: *I* – жидкую фазу (сталь); *II* – твердую фазу (закристаллизовавшийся металл); *III* – литейную металлическую форму с кольцевыми выточками на внутренней поверхности; *IV* – опорную конструкцию (ОК). Форма разъемная с внутренними кольцевыми выточками. Жидкий металл заливается в полость литейной формы сверху через литниковую воронку (ЛВ). Вид *A* – эскиз круговой выточки во внутреннем слое формы с соответствующими поверхностями, по которым будут установлены граничные условия.

Представленная ниже расчетная схема адекватно соответствует реальному технологическому процессу получения сферической стальной отливки в металлической форме.

Поскольку решается задача Коши, то физический фактор отвода тепла при охлаждении может быть осуществлен любым известным технологическим способом, например, естественным или принудительным охлаждением и т. п.

Рассмотрим вариант с двумя выточками на внутренней поверхности формы (рис. 2). Требуется найти такое рациональное их расположение на внутренней поверхности, чтобы наибольшие (по модулю) значения нормальных напряжений σ_{22} были бы минимальны.

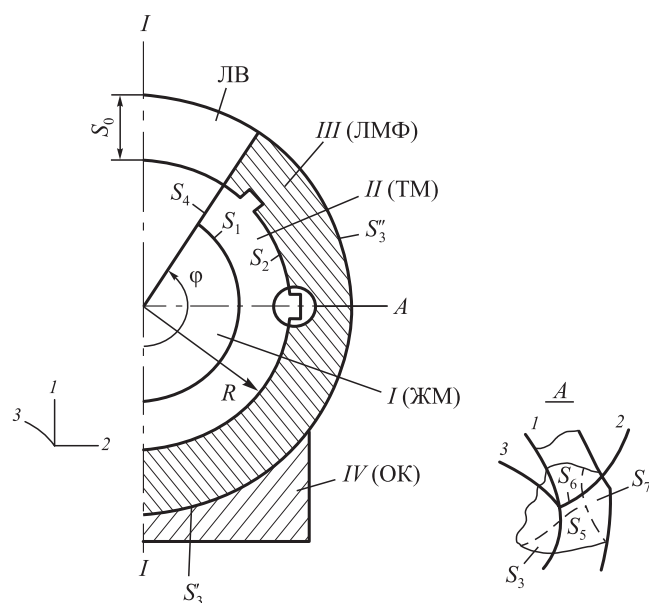


Рис. 1. Расчетная схема системы с указанием поверхности к граничным условиям задачи:

S_1 – поверхность контакта жидкого и затвердевшего металла;
 S_2 – внутренняя поверхность контакта затвердевшего металла и металлической формы; S_3' – внешняя поверхность металлической формы контакта с опорной конструкцией (ОК);
 S_3'' – внешняя поверхность металлической формы контакта с окружающей средой;

I – жидкий металл (ЖМ); *II* – твердый металл (ТМ);

III – литейная металлическая форма (ЛМФ);

IV – опорная конструкция (ОК); ЛВ – литниковая воронка

Fig. 1. Calculation scheme of the system with indication of the surface to the boundary conditions of the problem:

S_1 – contact surface of the liquid and solidified metal;

S_2 – inner contact surface of the solidified metal and the metal mold;

S_3' – outer surface of the metal mold in contact

with the support structure (OK); S_3'' – outer surface of the metal mold in contact with the environment;

I – liquid metal (ЖМ); *II* – solid metal (ТМ);

III – metal casting mold (ЛМФ);

IV – support structure (ОК); ЛВ – funnel

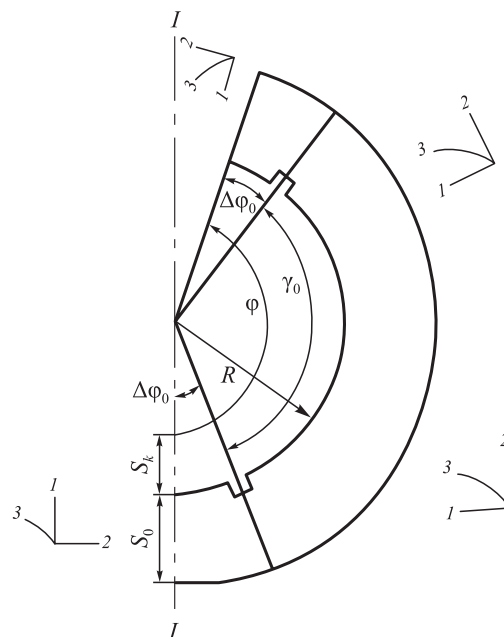


Рис. 2. Схема системы *I* (ЖМ) – *II* (ТМ) – *III* (ЛМФ) к оптимизации конструкции с двумя выточками на внутренней поверхности формы

Fig. 2. Scheme of the system *I* (ЖМ) – *II* (ТМ) – *III* (ЛМФ) for optimizing the structure with two recesses on the mold inner surface

Для этого условия целевая функция будет иметь вид:

$$F = \min |\sigma_{22}(\gamma)| \max \left| \sigma_{22} \left(Q|_{S_2}, \tau \right) \right| \quad (1)$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} 0 \leq \gamma_0 \leq 120^\circ; \\ 0 < \tau \leq 15 \text{ с}; \end{aligned} \quad (2)$$

здесь Q – площадь меридианного сечения формы.

Ограничение по τ взято из решения подобной задачи, когда при охлаждении жидкого металла в форме без выточек напряжения σ_{22} , σ_{33} по сечениям уменьшаются по модулю уже при $\tau > 10$ с. Ограничение по углу раствора γ_0 следует из условия, что уменьшение сжимающих напряжений σ_{22} при наличии выточки распространяется на ограниченную область.

Центральную роль в задаче занимает решение системы уравнений линейной теории упругости на временном шаге $\bar{\Delta}\tau_n$.

Используя уравнения линейной теории упругости, запишем для каждой из областей систему уравнений в декартовой системе координат:

– область I (жидкий металл):

$$\begin{aligned} \sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma = -P_1; \\ \dot{\theta} = a_1 \Delta \theta; \end{aligned} \quad (3)$$

– области II , III (закристаллизовавшийся твердый металл, форма):

$$\begin{cases} \sigma_{ij,j} = 0, \quad i; \\ \sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij} = 2G_p \varepsilon_{ij}^*; \quad \varepsilon_{ij}^* = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \varepsilon \delta_{ij}; \\ \varepsilon = \varepsilon_{ii}; \\ \varepsilon_{ii} = 3k_p \sigma + 3\alpha_p (\theta - \theta_p^*); \\ \varepsilon_{ij} = 0,5 (U_{i,j} + U_{j,i}); \\ \dot{\theta} = a_p \Delta \theta, \end{cases} \quad (4)$$

где U_i – перемещения; ε_{ij} – деформации; σ – гидростатическое напряжение; $p = I, II, III$ – рассматриваемые области; $G_p(\theta)$ – модуль сдвига в области p ($p = II, III$); G_p ($p = II, III$) – модуль сдвига металла ($p = II$) и формы ($p = III$); δ_{ij} – символ Кронекера; k_p – коэффициенты объемного сжатия; α_p – коэффициенты линейного расширения ($p = II, III$); a_p – коэффициенты теплопроводности ($p = I, II, III$); θ – текущая температура; τ – время; θ_p^* – начальные температуры в области $p = I, II, III$; P_1 – давление в области I ; $a_p = \frac{\lambda_p}{c_p \gamma_p}$;

λ_p – коэффициент теплопроводности; c_p – коэффициент теплоемкости; γ_p – удельный вес; Δ – оператор Лапласа.

В процессе охлаждения жидкого металла при условии, что $\theta_m \leq \theta_k$ (где θ_m – температура металла; θ_k –

температура кристаллизации), определяется толщина затвердевшего слоя из решения межфазового перехода:

$$\frac{d\theta_1}{dn} \lambda_1 - \frac{d\theta_2}{dn} \lambda_2 = \frac{dx}{d\tau} L \rho, \quad (5)$$

где θ_1 и θ_2 – температура твердой и жидкой фаз; λ_1 и λ_2 – коэффициент теплопроводности твердой и жидкой фазы; L – скрытая теплота плавления; ρ – плотность твердой фазы; x – текущая толщина корочки затвердевшего металла; n – нормаль к границе двух фаз.

Если предположить, что температура в твердой фазе по толщине δx_n изменяется по линейному закону и градиент температуры в жидкой фазе равен нулю, то решение уравнения (5) дает следующую зависимость для определения толщины закристаллизовавшейся корочки δx_n на временном шаге $\bar{\Delta}\tau_n$ [21]:

$$\delta x_n = C \sqrt{\tau}; \quad C = \sqrt{\frac{2 \bar{\Delta} \theta_1 \lambda_1}{\rho L}}; \quad (6)$$

здесь $\bar{\Delta} \theta_1$ – перепад температур в твердой фазе вблизи фронта кристаллизации.

Начальные условия задачи (3), (4):

– $\delta x|_{\tau=0} = 0$ – отсутствие твердой фазы металла;

– $\theta_1|_{\tau=0} = \theta_0$ – температура разливаемого жидкого металла (1500 °C);

– $\theta_3^*|_{\tau=0} = \theta^*$ – начальная температура формы (20 °C).

Начальные значения напряжений равны нулю.

Решение системы (3), (4) осуществляется в ортогональной системе координат. Задача осесимметричная:

$$U_3 = 0; \quad \sigma_{31} = \sigma_{32} = 0; \quad \varepsilon_{31} = \varepsilon_{32} = 0.$$

Граничные условия задачи (3, 4) (рис. 1):

– на оси симметрии

$$U_2 = 0; \quad \sigma_{21} = 0; \quad q_n = 0;$$

– на поверхностях $S_1 - S_8$

$$\sigma_{11}|_{S_1} = -P_1; \quad \sigma_{12}|_{S_i} = 0 \quad (i = 1, 5, 6);$$

$$\sigma_{11}|_{S_3^*} = 0; \quad \sigma_{11}|_{S_i} = 0 \quad (i = 5, 6);$$

$$\sigma_{12}|_{S_3} = 0; \quad \sigma_{22}|_{S_i} = 0 \quad (i = 7, 8); \quad (7)$$

$$U_1|_{S_3} = 0; \quad U_2|_{S_4} = 0; \quad \sigma_{21}|_{S_i} = 0 \quad (i = 4, 7, 8);$$

$$\theta|_{S_1} = \theta_0; \quad \theta|_{S_3} = \theta^*,$$

где q_n – тепловой поток; $S_3 = S_3' + S_3''$ – поверхности соприкосновения формы с опорной конструкцией и свободной поверхностью.

Для решения системы уравнений (3), (4) с граничными условиями (7) использован численный метод, описанный в работе [17] и примененный в исследова-

ниях [21; 22] и др. Рассматриваемая область разбивается системой ортогональных поверхностей на элементы конечных размеров, для каждого элемента записывается система (3), (4) в разностной форме через значения напряжений и перемещений по граням элементов и длин дуг ребер, образующих элемент, которая решается с учетом начальных и граничных условий по разработанной в работе [17] методике и составленному алгоритму. Результаты решения: напряжения и перемещения по граням каждого элемента и средняя температура по каждому элементу на временном шаге. Численное решение задачи осуществлялось с использованием разработанной программы и программного комплекса «Одиссей»².

Разностный аналог уравнения теплопроводности для ортогонального элемента строится из теплового баланса [17] и включает среднюю температуру по элементу и температуры окружающих его элементов, а также длины дуг, образующих ортогональные элементы. Численное решение этой системы уравнений осуществляется методом прогонки.

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Решение задачи (1) с условиями (2) осуществляется согласно нижеописанному алгоритму.

1. Исследуемая область разбивается на конечное число ортогональных элементов; задаются геометрические размеры S и R .

2. Время охлаждения $\tau^* = 15$ с при решении задачи (1) с условиями (2) разбивается на конечное число шагов: $\tau^* = \sum \bar{\Delta}\tau_n$, где n – номер временного шага.

3. Задаются физико-механические свойства материалов: жидкой и кристаллизующейся стали, формы.

4. Задаются геометрические размеры выточек $\bar{\Delta}\varphi_0$, φ , γ_0 .

5. Задается шаг по изменению текущего параметра γ : $\bar{\Delta}\gamma$.

6. Задаются начальные и граничные условия по элементам, образующим рассматриваемую область, и областям, образующих выточки.

7. Вычисляются длины дуг элементов, образующих конкретную область.

8. Определяется поле температур на временном шаге $\bar{\Delta}\tau_n$ численным решением уравнения теплопроводности при наличии начальных и граничных условий на данном временном шаге.

9. Если в области I у поверхности S_2 температура $\theta|_{S_2} \leq \theta_k$, то вычисляется толщина закристаллизовавшейся корочки по формуле (6); следует перестройка сетки с операции **7**. Если $\theta|_{S_2} > \theta_k$, то выполняется операция **10**.

10. Решается система уравнений (4) (исключая уравнения теплопроводности) по методике, описанной в работе [17]. Определяются поля напряжений σ_{ij} и перемещений U_i ($i, j = 1, 2, 3$).

11. По области Q на поверхности S_2 находится максимальное (по модулю) напряжение σ_{22} и заносится в матрицу $\{\sigma_2\}'$.

12. Производится шаг по времени. Если $\sum \bar{\Delta}\tau_n < \tau^*$, то выполняется операция **8**. Если $\sum \bar{\Delta}\tau_n = \tau^*$, то выполняется операция **13**.

13. Из матрицы $\{\sigma_2\}'$ находится значение $\sigma_{22} = \max\{\sigma_2\}'$ и заносится в матрицу $\{\sigma_2\}''$.

14. Производится шаг $\gamma_n = \gamma_{n-1} - \bar{\Delta}\gamma$; $\tau = 0$. Если $\gamma_n = 0$, то следует операция **15**, если $\gamma_n > 0$, следует операция **6**.

15. Из матрицы $\{\sigma_2\}''$ выбирается значение $\bar{\sigma}_{22} = \min\{\sigma_3\}'$ и соответствующие ему время τ и угол γ .

16. Окончание решение задачи.

РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

Геометрические параметры формы: $S_0 = 50$ мм, $R = 20$ мм, $\varphi = 150^\circ$.

Временные интервалы: $\bar{\Delta}\tau_n$: 0,01; 0,02; 0,03; 0,04; 0,05; 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 2,0; 5,0; 6,0; 8,0; 9,0 с; $P_1 = 1$ кг/см².

Разбиение области $N_1 \times N_2 = 13 \times 20$.

Как показали расчеты, разбивка области на 13×20 элементов по первой и второй координатной оси у формы без выточек вполне пригодна для анализа проводимых расчетов. Аналогично и у формы с выточками, разбивка на 13×20 элементов по тем же координатным осям тоже вполне оправдана.

Параметры разливаемой стали при $\theta > 1000^\circ\text{C}$ ($\theta_m^* = 1000^\circ\text{C}$):

$$G_2 = 10^4 \text{ МПа}; \alpha_{1,2} = 12 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1};$$

$$\lambda = 0,0298 \text{ Вт/(мм} \cdot ^\circ\text{C)};$$

$$L_1 = 270 \cdot 10^3 \text{ Дж/кг (скрытая теплота плавления)}; \quad (8)$$

$$C_{1,2} = 444 \text{ Дж/(кг} \cdot ^\circ\text{C)}; \gamma_1 = 7,80 \cdot 10^{-6} \text{ кг/мм}^3;$$

$$\theta_k = 1450^\circ\text{C}.$$

Физические свойства металлической формы такие же, как и в (8), но

$$G_3 = 81\,000 \left[1 - 1,2 \left(\frac{Q}{1000} \right)^2 \right] \text{ МПа}. \quad (9)$$

Начальные значения процесса оптимизации $\bar{\Delta}\varphi_0 = 23^\circ$, $\gamma_0 = 104^\circ$; размеры выточек A_1, A_2 (7,1×2,6) мм в направлении осей I и 2 (рис. 3). Размеры выточек соответствуют размерам элементов сетки.

² Одинокое В.И., Прокудин А.Н., Сергеева А.М., Севастьянов Г.М. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2012661389, Одиссей. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 13.12.2012.

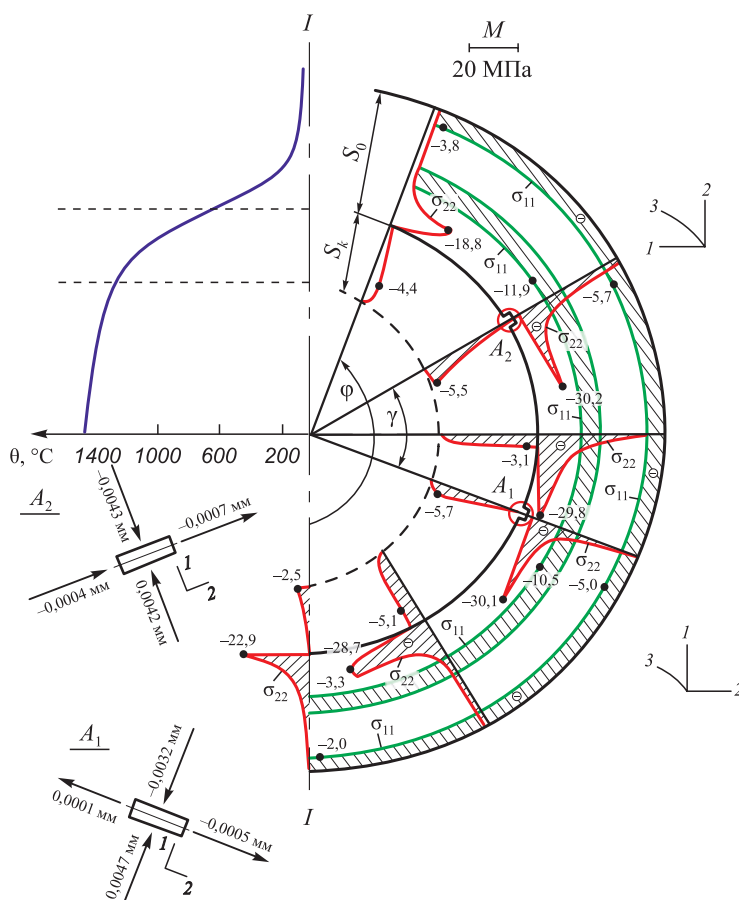


Рис. 3. Эпюры нормальных напряжений σ_{11} , σ_{22} и перемещений U_1 , U_2 по граням выточек A_1 и A_2 в форме при $\tau = 8,6$ с

Fig. 3. Plots of normal stresses σ_{11} , σ_{22} and displacements U_1 , U_2 along the edges of the recesses A_1 and A_2 in the mold at $\tau = 8.6$ s

В результате расчетов по приведенному выше алгоритму получено:

$$F = 29,8 \text{ МПа}; \gamma = 60^\circ; \tau = 8,6 \text{ с.} \quad (10)$$

На рис. 3 приведены эпюры σ_{11} , σ_{22} и перемещения U_1 , U_2 по граням выточек A_1 , A_2 в форме. Видим, что по внутренним углам выточек A_1 , A_2 имеют место концентраторы напряжений σ_{22} , соответственно равные $-30,1$ и $-30,2$ МПа, которые несколько выше (по модулю), чем найденное значение F . Для сравнения на рис. 4 приведены эпюры напряжений σ_{22} , МПа, по сечению формы, не имеющей выточек; время то же – $8,6$ с. Напряжение σ_{33} не приведено, так как оно примерно равно напряжению σ_{22} с разницей $\pm 1\%$.

Видна существенная разница по напряжениям σ_{22} .

На рис. 5 приведены эпюры напряжений σ_{33} для найденных параметров (10).

Хотя напряжения σ_{33} по многим сечениям уменьшились (по модулю), но на большом участке сжимающие напряжения довольно значительны (более 60 МПа). Следовательно, необходимо было оптимизацию вести как по σ_{22} , так и по σ_{33} . Напряжение σ_{22} было взято, так как выточки в форме как бы прорезают их значитель-

ные значения на поверхности S_3 в момент начального процесса охлаждения (рис. 4), не влияя на осевую симметрию. По всей видимости, для глобального снижения

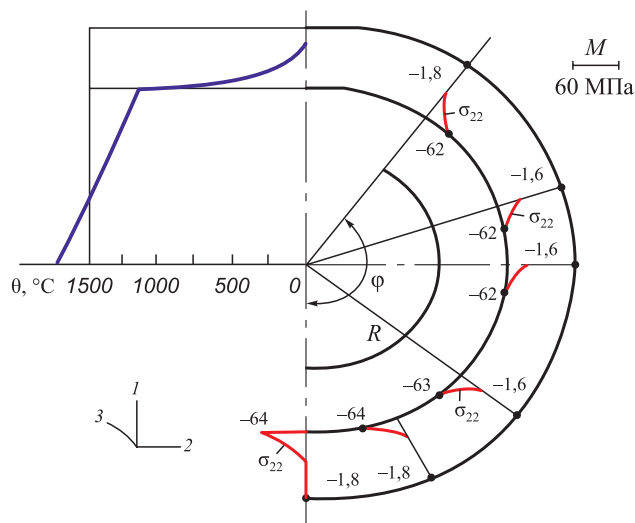


Рис. 4. Эпюры нормальных напряжений σ_{22} по сечению формы без выточек при $\tau = 8,6$ с

Fig. 4. Plots of normal stresses σ_{22} along the mold section without recesses at $\tau = 8.6$ s

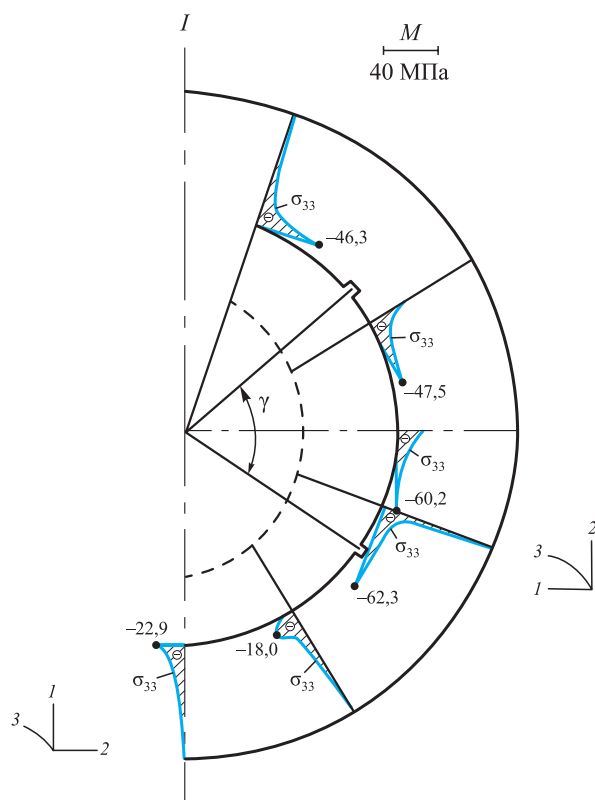


Рис. 5. Эпюры нормальных напряжений σ_{33} в форме при оптимальных расчетных параметрах (10)

Fig. 5. Plots of normal stresses σ_{33} in the mold at optimal design parameters (10)

сжимающих напряжений σ_{22} и σ_{33} необходимо делать в форме дополнительные выточки, перпендикулярные заданным.

Но это уже другая задача (не осесимметричная), с другими уравнениями и другими граничными условиями.

В рамках настоящей работы проведена попытка понизить (по модулю) напряжения σ_{33} , введя дополнительные выточки на поверхности S_2 . По результатам полученного решения (10) следует, что выточки расположены на поверхности S_2 симметрично по углу φ с углом раствора γ (рис. 2). При этом наибольшие (по модулю) напряжения σ_{33} как раз имеют место внутри раствора угла γ (рис. 5). Введем дополнительно еще две выточки на поверхности S_2 внутри найденного угла γ . Проведем расчет НДС оболочечной стальной формы с заданными четырьмя выточками на поверхности S_2 по приведенному выше алгоритму до $\tau = 8,6$ с. Алгоритм значительно упрощается, так как расположение выточек фиксировано и время охлаждения задано. На рис. 6 приведены результаты расчета σ_{22} и σ_{33} по сечению формы на конец временного шага $\tau^* = 8,6$ с. Наблюдаем значительное снижение (по модулю) напряжений σ_{22} , а также снижение (по модулю) напряжений σ_{33} .

Таким образом, новизной настоящей работы является постановка задачи по установлению расположе-

ния температурных швов как технологически важных областей, так и значений напряжений в сферической металлической форме в условиях целевой функции min–max, а также алгоритм решения.

Предложенные методика, алгоритм моделирования и оптимизации стойкости сферических металлических форм к трещинообразованию могут быть использованы при численном решении других задач для различных функциональных оболочек.

Выводы

Поставлена и решена задача оптимизации конструктивных параметров температурных швов в сферичес-

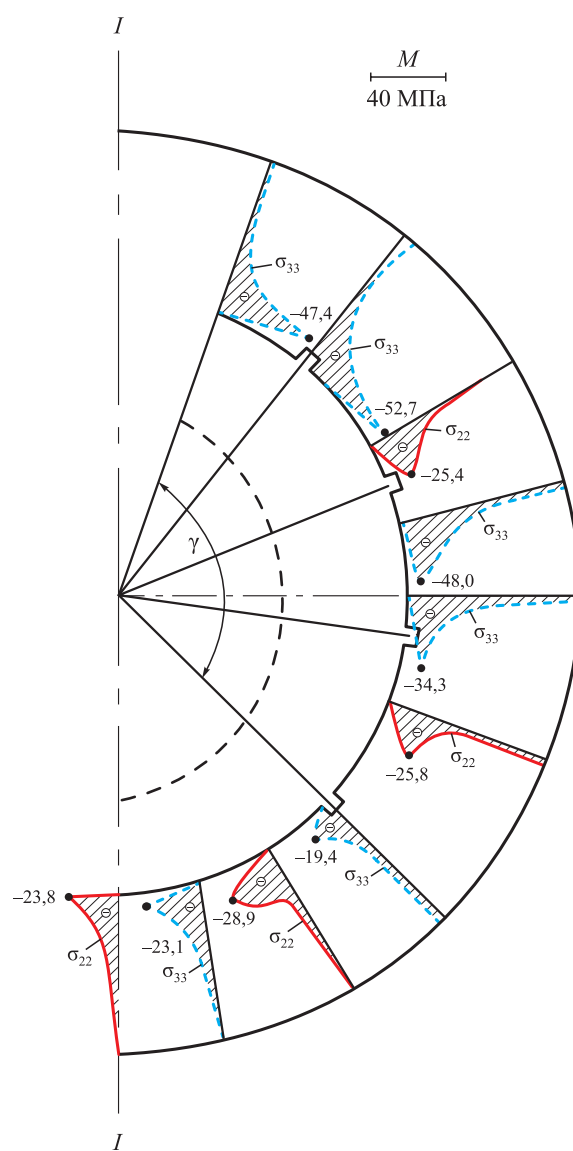


Рис. 6. Эпюры расчетных значений нормальных напряжений σ_{22} и σ_{33} по сечению формы при $\tau^* = 8,6$ с:

— σ_{22} ; — σ_{33}

Fig. 6. Plots of calculated values of normal stresses σ_{22} and σ_{33} along the mold section at $\tau^* = 8.6$ s:

— σ_{22} ; — σ_{33}

кой металлической литейной форме при заливке в нее расплавленного металла. При анализе НДС выявлены конструктивные особенности литейной металлической формы сферической конфигурации.

Наличие температурных швов на поверхности соприкосновения внутренней части формы с жидким металлом значительно снижает влияние возникающих температурных напряжений в первые моменты охлаждения отливки.

Определены рациональные области расположения температурных швов в ОФ и значения напряжений в них в условиях целевой функции min-max и разработанного алгоритма решения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ / REFERENCES

1. Евстигнеев А.И., Дмитриев Э.А., Одинокоев В.И., Чернышова Д.В., Евстигнеева А.А., Иванкова Е.П. О трещиностойкости керамической оболочковой формы по выплавляемым моделям при затвердевании в ней шарообразной стальной отливки. *Литейное производство*. 2022;(9):17–21.
- Evstigneev A.I., Dmitriev E.A., Odinokov V.I., Chernyshova D.V., Evstigneeva A.A., Ivankova E.P. On the crack resistance of a ceramic shell mold according to the smelted models when a spherical steel casting solidifies in it. *Foundry. Technologies and Equipment*. 2022;(9):17–21. (In Russ.).
2. Литейное производство: Учебник для металлургических специальностей вузов / А.М. Михайлов, Б.В. Бауман, Б.Н. Благов и др. Москва: Машиностроение; 1987:256.
3. Голофаев А.Н. Расчет напряженно-деформированного состояния кокилей методом конечных элементов. *Литейное производство*. 1983;(5):16.
- Golofaev A.N. Calculation of stress-strain state of coils by the finite element method. *Foundry. Technologies and Equipment*. 1983;(5):16. (In Russ.).
4. Дембовский В.В. Численное моделирование процессов формирования отливок в металлических формах. *Литейное производство*. 1992;(6):31–32.
- Dembovskii V.V. Numerical modeling of castings forming in metal molds. *Foundry. Technologies and Equipment*. 1992;(6):31–32. (In Russ.).
5. Огородникова О.М. Напряженно-деформированное состояние металла в эффективном интервале кристаллизации. *Литейное производство*. 2012;(9):21–24.
- Ogorodnikova O.M. Stress-strain state of metal in the effective crystallization interval. *Foundry. Technologies and Equipment*. 2012;(9):21–24. (In Russ.).
6. Десницкая Л.В., Десницкий В.В., Матвеев И.А. Учет напряженно-деформированного состояния кристаллизующихся стальных отливок в технологии их производства. *Литейное производство*. 2019;(4):6–8.
- Desnitskaya L.V., Desnitskii V.V., Matveev I.A. Consideration of the stress-strain state of crystallizing steel castings in their production technology. *Foundry. Technologies and Equipment*. 2019;(4):6–8. (In Russ.).
7. Gamer U. On the elastic-plastic deformation of a sphere subjected to axisymmetric temperature field. *Journal of Thermal Stresses*. 1988;11(3):159–173. <https://doi.org/10.1080/01495738808961930>
8. Khaldi M., Loughman A., Ashrafi H., Arefi M. Analysis of thick-walled spherical shells subjected to external pressure: Elastoplastic and residual stress analysis. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part L: Journal of Materials: Design and Applications*. 2019;234(1):146442071988295. <https://doi.org/10.1177/1464420719882958>
9. Güven U. On stress distributions in functionally graded isotropic spheres subjected to internal pressure. *Mechanics Research Communications*. 2001;28(3):277–281. [https://doi.org/10.1016/s0093-6413\(01\)00174-4](https://doi.org/10.1016/s0093-6413(01)00174-4)
10. Ootao Y., Ishihara M. Transient thermoelastic analysis for a multilayered hollow cylinder with piecewise power law nonhomogeneity due to asymmetric surface heating. *Acta Mechanica*. 2014;225(10):2903–2922. <https://doi.org/10.1007/s00707-014-1204-3>
11. Saiyan S.G., Paushkin A.G. Development and verification of the two-layer thick-walled spherical shell's finite element model under temperature and force exposure. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 2020;913(3):032058. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/913/3/032058>
12. Miller G.K. Stresses in a spherical pressure vessel undergoing creep and dimensional changes. *International Journal of Solids and Structures*. 1995;32(14):2077–2093. [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(94\)00197-5](https://doi.org/10.1016/0020-7683(94)00197-5)
13. Karami K., Abedi M., Zamani Nejad M., Lotfian M.H. Elastic analysis of heterogeneous thick-walled spherical pressure vessels with parabolic varying properties. *Frontiers of Mechanical Engineering*. 2012;7(4):433–438. <https://doi.org/10.1007/s11465-012-0336-1>
14. Abdelsalam O.R. Design optimization for a three-layers shrink-fitted pressure vessel exposed to very high pressure. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 2019;610:012077. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/610/1/012077>
15. Vitucci G., Mishuris G. Analysis of residual stresses in thermoelastic multilayer cylinders. *Journal of the European Ceramic Society*. 2016;36(9):2411–2417. <https://doi.org/10.1016/j.jeurceramsoc.2015.12.003>
16. Одинокоев В.И., Дмитриев Э.А., Евстигнеев А.И., Намоконов А.Н., Чернышова Д.В., Евстигнеева А.А. Моделирование напряженно-деформированного состояния и оптимизация угла охвата сферической оболочковой формы опорным наполнителем. *Прикладная механика и техническая физика*. 2025;(1):189–196. <https://doi.org/10.15372/PMTF202415455>
- Odinokov V.I., Dmitriev E.A., Evstigneev A.I., Namokonov A.N., Chernyshova D.V., Evstigneeva A.A. Modeling the stress-strain state and optimizing the angle of contact of a spherical shell mold by a support filler. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2025;(1):189–196. (In Russ.). <https://doi.org/10.15372/PMTF202415455>
17. Математическое моделирование сложных технологических процессов / В.И. Одинокоев, Б.Г. Каплунов, А.В. Песков, А.В. Баков. Москва: Наука; 2008:178.
18. Алексеев Г.В., Левин В.А., Терешко Д.А. Моделирование и оптимизация в задачах проектирования сферических

- слоистых тепловых оболочек. *Прикладная механика и техническая физика*. 2019;60(2):158–168.
<https://doi.org/10.15372/PMTF20190213>
- Alekseev G.V., Levin V.A., Tereshko D.A. Simulation and optimization in the problems of design of spherical layered thermal shells. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2019;60(2):323–331.
<https://doi.org/10.15372/PMTF20190213>
19. Чзан Ю., Цзинь Ч., Пан М. Пластическая неустойчивость сферического сосуда высокого давления из ортотропного материала, нагруженного внутренним импульсным давлением. *Прикладная механика и техническая физика*. 2022;63(2):192–196.
<https://doi.org/10.15372/PMTF20220218>
- Zhang Y.C., Jin C.W., Pang M. Plastic instability for a plastic orthotropic spherical pressure vessel under internal impulsive loading. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2022;63(2):343–346. (In Russ.).
<https://doi.org/10.1134/S0021894422020183>
20. Алексеев Г.В., Соболева О.В., Терешко Д.А. Задачи идентификации для стационарной модели массопереноса. *Прикладная механика и техническая физика*. 2008;49(4(290)):24–35.
- Alekseev G.V., Soboleva O.V., Tereshko D.A. Identification problems for a steady-state model of mass transfer. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2008; 49(4):537–547.
<https://doi.org/10.1007/s10808-008-0071-x>
21. Евстигнеев А.И., Дмитриев Э.А., Чернышова Д.В., Одинокое В.И., Евстигнеева А.А., Иванкова Е.П. Моделирование внешнего силового воздействия на стойкость оболочковой формы при заливке в нее стали. *Математическое моделирование*. 2022;34(5):61–72.
<https://doi.org/10.20948/mm-2022-05-04>
- Evstigneev A.I., Dmitriev E.A., Chernyshova D.V., Odinokov V.I., Evstigneeva A.A., Ivankova E.P. Modeling of external force action on a shell mold for pouring steel. *Matematicheskoe modelirovanie*. 2022;34(5):61–72. (In Russ.). <https://doi.org/10.20948/mm-2022-05-04>
22. Евстигнеев А.И., Одинокое В.И., Дмитриев Э.А., Свиридов А.В., Иванкова Е.П. Влияние внешнего теплового воздействия на напряженное состояние оболочковых форм по выплавляемым моделям. *Математическое моделирование*. 2021;33(1):63–76.
<https://doi.org/10.20948/mm-2021-01-05>
- Evstigneev A.I., Odinokov V.I., Dmitriev E.A., Sviridov A.V., Ivankova E.P. The influence of external heat exposure on the stress state of shell forms by smelting models. *Matematicheskoe modelirovanie*. 2021;33(1):63–76. (In Russ.).
<https://doi.org/10.20948/mm-2021-01-05>

Сведения об авторах

Information about the Authors

Алексей Иванович Евстигнеев, д.т.н., профессор, главный научный сотрудник Управления научно-исследовательской деятельностью, Комсомольский-на-Амуре государственный университет
ORCID: 0000-0002-9594-4068
E-mail: diss@knastu.ru

Дарья Витальевна Чернышова, аспирант кафедры «Авиационное», Комсомольский-на-Амуре государственный университет
ORCID: 0000-0001-5142-2455
E-mail: daracernysova744@gmail.com

Валерий Иванович Одинокое, д.т.н., профессор, главный научный сотрудник Управления научно-исследовательской деятельностью, Комсомольский-на-Амуре государственный университет
ORCID: 0000-0003-0200-1675
E-mail: 79122718858@yandex.ru

Эдуард Анатольевич Дмитриев, д.т.н., доцент, ректор, Комсомольский-на-Амуре государственный университет
ORCID: 0000-0001-8023-316X
E-mail: rector@knastu.ru

Анна Алексеевна Евстигнеева, магистрант кафедры «Прикладная математика», Комсомольский-на-Амуре государственный университет
ORCID: 0000-0003-0667-2468
E-mail: annka.ewstic@mail.ru

Юлия Борисовна Колошенко, старший преподаватель кафедры «Авиационное», Комсомольский-на-Амуре государственный университет
ORCID: 0009-0005-4480-075X
E-mail: koloschenko2011@yandex.ru

Дмитрий Андреевич Потянихин, к.ф.-м.н., доцент кафедры «Авиационное», Комсомольский-на-Амуре государственный университет
ORCID: 0000-0001-6113-6073
E-mail: potyanikhin@mail.ru

Aleksei I. Evstigneev, Dr. Sci. (Eng.), Prof., Chief Researcher of the Department of Research Activities, Komsomolsk-on-Amur State University
ORCID: 0000-0002-9594-4068
E-mail: diss@knastu.ru

Dar'ya V. Chernyshova, Postgraduate of the Chair of Aircraft Engineering, Komsomolsk-on-Amur State University
ORCID: 0000-0001-5142-2455
E-mail: daracernysova744@gmail.com

Valerii I. Odinokov, Dr. Sci. (Eng.), Prof., Chief Researcher of the Department of Research Activities, Komsomolsk-on-Amur State University
ORCID: 0000-0003-0200-1675
E-mail: 79122718858@yandex.ru

Eduard A. Dmitriev, Dr. Sci. (Eng.), Assist. Prof., Rector, Komsomolsk-on-Amur State University
ORCID: 0000-0001-8023-316X
E-mail: rector@knastu.ru

Anna A. Evstigneeva, MA Student of the Chair "Applied Mathematics", Komsomolsk-on-Amur State University
ORCID: 0000-0003-0667-2468
E-mail: annka.ewstic@mail.ru

Yuliya B. Koloshenko, Senior Lecturer of the Chair of Aircraft Engineering, Komsomolsk-on-Amur State University
ORCID: 0009-0005-4480-075X
E-mail: koloschenko2011@yandex.ru

Dmitrii A. Potyanikhin, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Assist. Prof. of the Chair of Aircraft Engineering, Komsomolsk-on-Amur State University
ORCID: 0000-0001-6113-6073
E-mail: potyanikhin@mail.ru

Вклад авторов

Contribution of the Authors

А. И. Евстигнеев – формирование концепции статьи, определение цели и задачи исследования, анализ результатов исследования, подготовка текста.

Д. В. Чернышова – проведение и обработка расчетов, подготовка библиографического списка, обработка графического материала.

В. И. Одинокоев – научное руководство, анализ результатов исследований, редактирование и корректировка финальной версии статьи.

Э. А. Дмитриев – проведение расчетов, их анализ, подготовка и корректировка текста.

А. А. Евстигнеева – проведение расчетов, подготовка текстового и графического материала.

Ю. Б. Колошенко – проведение и обработка расчетов, формулирование численной схемы и алгоритма расчетов.

Д. А. Потянихин – проведение расчетов и их обработка.

A. I. Evstigneev – conceptualization, setting goals and objectives of research, analysis of research results, writing the text.

D. V. Chernyshova – carrying out and processing calculations, preparing references, processing graphic material.

V. I. Odinokov – scientific guidance, analysis of research results, editing and correction of the final version of the article.

E. A. Dmitriev – carrying out calculations and their analysis, preparation and correction of the text.

A. A. Evstigneeva – carrying out calculations, preparation of the text and graphic material.

Yu. B. Koloshenko – carrying out and processing calculations, formulation of a numerical scheme and calculation algorithm.

D. A. Potyanikhin – carrying out and processing calculations.

Поступила в редакцию 06.11.2024
После доработки 27.06.2025
Принята к публикации 27.06.2025

Received 06.11.2024
Revised 27.06.2025
Accepted 27.06.2025