

ИННОВАЦИИ В МЕТАЛЛУРГИЧЕСКОМ  
ПРОМЫШЛЕННОМ И ЛАБОРАТОРНОМ  
ОБОРУДОВАНИИ, ТЕХНОЛОГИЯХ И МАТЕРИАЛАХINNOVATION IN METALLURGICAL  
INDUSTRIAL AND LABORATORY EQUIPMENT,  
TECHNOLOGIES AND MATERIALS

УДК 621.74.045

DOI 10.17073/0368-0797-2024-2-211-218

Оригинальная статья  
Original article

## НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ КЕРАМИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКОВОЙ ФОРМЫ ПРИ ФОРМИРОВАНИИ В НЕЙ СТАЛЬНОЙ ШАРООБРАЗНОЙ ОТЛИВКИ. ЧАСТЬ 1

В. И. Одинокоев<sup>✉</sup>, А. И. Евстигнеев, Э. А. Дмитриев, А. Н. Намоконов,  
А. А. Евстигнеева, Д. В. Чернышова

Комсомольский-на-Амуре государственный университет (Россия, 681013, Хабаровский край, Комсомольск-на-Амуре, пр. Ленина, 27)

[✉ diss@knastu.ru](mailto:diss@knastu.ru)

**Аннотация.** Задачей настоящего теоретического исследования является определение внешних факторов, при которых сферическая оболочковая форма (ОФ) не будет разрушаться от возникающих в ней температурных напряжений. Сформулирована задача по определению напряженно-деформируемого состояния (НДС) ОФ, заформированной в опорный наполнитель (ОН), при охлаждении в ней затвердевающей шарообразной стальной отливки. Рассматриваемое осесимметричное тело вращения имеет четыре области (жидкий металл, твердый металл, оболочковая форма, опорный наполнитель). Для решения задачи авторы используют уравнение линейной теории упругости, уравнение теплопроводности и апробированный численный метод, согласно которому исследуемая область разбивается системой ортогональных поверхностей на элементы. Для каждого элемента записана система уравнений в разностном виде с учетом осевой симметрии через напряжения и перемещения по граням элемента и длинам дуг ребер, ограничивающих его объем. Уравнение теплопроводности записано в разностном виде из построения теплового баланса для произвольного ортогонального элемента, включающее как среднюю температуру элемента, так и температуры элементов, окружающих его объем. Решение разностного аналога уравнения теплопроводности осуществляется методом «прогонки» по составленной итерационной схеме. Приведен разностный аналог сформулированной системы дифференциальных уравнений линейной теории упругости в виде алгебраической системы уравнений. Представленный алгоритм свертки этой системы позволяет значительно понизить ее ранг. Приводится общая численная схема и алгоритм решения задачи. Результатом решения являются величины напряжений, перемещений в среднем по граням каждого элемента и средняя температура в элементе.

**Ключевые слова:** литье по выплавляемым моделям, оболочковая форма, напряженное состояние, моделирование, трещинообразование

**Благодарности:** Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-29-00214, <https://rscf.ru/project/24-29-00214/>.

**Для цитирования:** Одинокоев В.И., Евстигнеев А.И., Дмитриев Э.А., Намоконов А.Н., Евстигнеева А.А., Чернышова Д.В. Напряженно-деформируемое состояние керамической оболочковой формы при формировании в ней стальной шарообразной отливки. Часть 1. *Известия вузов. Черная металлургия*. 2024;67(2):211–218. <https://doi.org/10.17073/0368-0797-2024-2-211-218>

## STRESS-STRAIN STATE OF CERAMIC SHELL MOLD DURING FORMATION OF SPHERICAL STEEL CASTING IN IT. PART 1

V. I. Odinokov<sup>✉</sup>, A. I. Evstigneev, E. A. Dmitriev, A. N. Namokonov,  
A. A. Evstigneeva, D. V. Chernyshova

Кomsomolsk-on-Amur State University (27 Lenina Ave., Khabarovsk Territory, Komsomolsk-on-Amur 681013, Russian Federation)

[✉ diss@knastu.ru](mailto:diss@knastu.ru)

**Abstract.** The task of the present theoretical investigation was to determine the external factors at which a spherical shell mold will not fail due to temperature stresses occurring in it. The problem is formulated for determining the stress-strain state of the spherical shell mold formed in the support filler at cooling of solidifying spherical steel casting. The investigated axisymmetric rotational body has four zones: liquid metal, solid metal, shell mold, and support filler. To solve the problem, the equation of linear elasticity, the equation of heat capacity and a well-proven numerical method

were used according to which the investigated zone is partitioned into elements by a system of orthogonal surfaces. For each element, a formulated system of equations is written in difference form, taking into account axial symmetry through the values of stresses and displacements along the element edges and the lengths of the ribs' arcs that limit its volume. The heat conduction equation is written in difference form for construction of a heat balance for an arbitrary orthogonal element, including both average temperature of the element and temperatures of the elements surrounding its volume. The authors found the solution of the difference analogue of heat equation by the "sweep" method according to the compiled iterative scheme. A difference analogue of the formulated system of differential equations of the linear theory of elasticity has the form of an algebraic system of equations. The algorithm for convolution of this system allows one to significantly reduce its rank. A general numerical scheme and algorithm for solving the problem are presented. The result of the solution is the magnitude of stresses, displacements on average along the edges of each element and average temperature in the element.

**Keywords:** investment casting, shell mold, stressed state, modeling, crack resistance

**Acknowledgements:** The research was supported by the Russian Science Foundation, grant No. 24-29-00214, <https://rscf.ru/project/24-29-00214/>.

**For citation:** Odnokov V.I., Evstigneev A.I., Dmitriev E.A., Namokonov A.N., Evstigneeva A.A., Chernyshova D.V. Stress-strain state of ceramic shell mold during formation of spherical steel casting in it. Part 1. *Izvestiya. Ferrous Metallurgy*. 2024;67(2):211–218. <https://doi.org/10.17073/0368-0797-2024-2-211-218>

## ВВЕДЕНИЕ

Проведены аналитические [1; 2] и теоретические исследования [3 – 5] по трещиностойкости керамической оболочковой формы (КОФ) после заливки в нее жидкого металла и охлаждения затвердевающей отливки. Исследовалась оболочковая форма (ОФ) в форме стакана, ограниченная сферической и цилиндрической поверхностями. Установлено, что наиболее опасным напряжением, возникающим при охлаждении в ОФ жидкого металла, являются растягивающие нормальные напряжения на наружной поверхности формы, примыкающей к опорному наполнителю (ОН). Найдены оптимальные внешние силовые и температурные воздействия на ОФ, гарантирующие ее стойкость при получении в ней стальной отливки. Кроме того, изучены и предложены новые морфологические структуры ОФ, выдерживающие термические напряжения охлаждающихся в них отливок.

Проведено множество теоретических и экспериментальных исследований по установлению особенностей напряженно-деформированного состояния (НДС) керамической оболочковой формы и получаемых отливок в литье по выплавляемым моделям (ЛВМ) по влиянию на НДС материалов выплавляемых моделей [6; 7], формы и геометрии КОФ [8; 9], толщины стенки формы [10; 11], материала формы [12; 13], геометрии отливок [14 – 16], методов испытаний формы на прочность и пр. [17; 18].

Математическое моделирование таких процессов также представлено в других работах (в частности, методы моделирования [19], методы исследований [20 – 22], исследования с использованием численного моделирования [23 – 25], специальных математических моделей [26 – 28] и программных средств [29; 30]).

Как показали дальнейшие теоретические исследования, на стойкость ОФ большое влияние оказывает их форма, органически связанная с геометрией формирующейся в ней отливки.

Однако работ, в которых рассматриваются процессы моделирования трещиностойкости КОФ в зависимости от количественных и качественных показателей ее НДС при формировании в ней стальной отливки в виде сферы (шара), практически нет. Именно этому процессу посвящена настоящая работа.

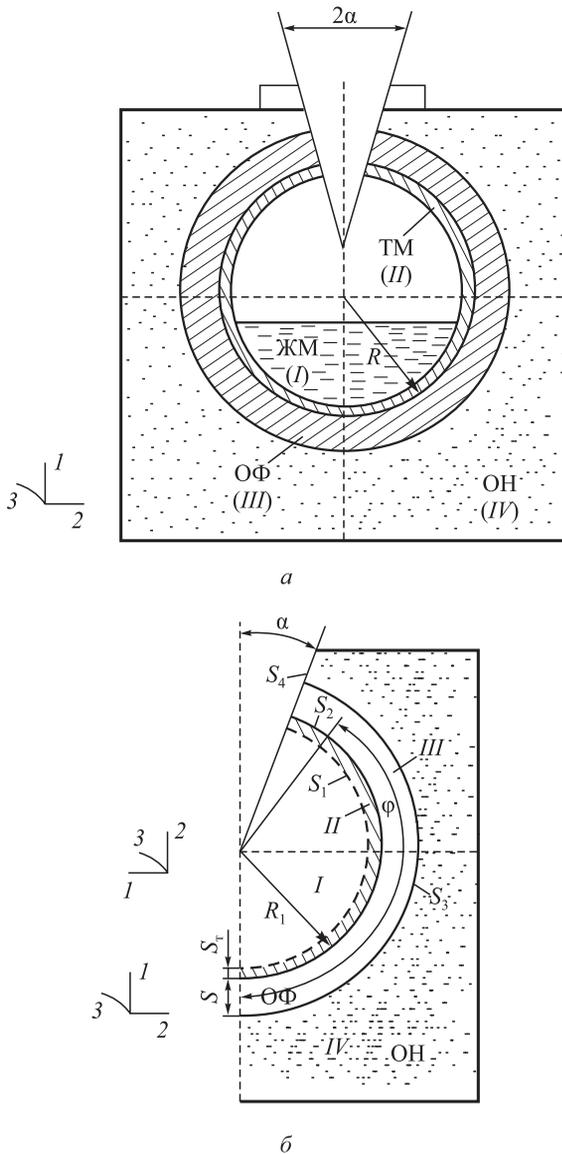
Приведено теоретическое исследование получения стальной отливки в ОФ в виде шара. В технике наблюдается огромное многообразие номенклатуры деталей, изготавливаемых в виде шаровой и сферической форм. К ним относятся, в первую очередь, шаровые опоры, которые являются основными узлами в машиностроении и робототехнике.

Первые теоретические результаты рассматриваемого технологического процесса опубликованы в работе [31], где наглядно показано, что НДС в ОФ коренным образом отличается от НДС в цилиндрической ОФ при получении стальной отливки. Однако в работе [31] не рассмотрена математическая модель процесса.

В настоящей работе показано, что качественные заготовки под шаровые опоры можно получать с помощью литья, что намного дешевле, чем обработкой металлов давлением.

## ИНЖЕНЕРНАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Жидкая сталь разливается в сферическую форму, в которой кристаллизуется путем отвода тепла от стенок ОФ через ОН (рис. 1, а). Сферическая ОФ может быть монолитной или состоять из ряда слоев [1]. При этом каждый слой ОФ может иметь свои физико-механические характеристики. При охлаждении стали в ОФ, вследствие большого температурного градиента, в стенке возникают температурные напряжения, которые при определенных внешних воздействиях могут привести к ее разрушению, а значит, и к браку получаемой стальной отливки. Таким образом, задачей настоящего теоретического исследования является определение внешних факторов, при которых сферическая ОФ не будет разрушаться от возникающих в ней температурных напряжений.



**Рис. 1.** Общая (а) и расчетная (б) схемы шарообразной ОФ, заформованной в опорный наполнитель и залитой жидким металлом с учетом осевой симметрии:

ЖМ – жидкий металл (область I); ТМ – твердый металл (область II); ОФ – оболочковая форма (область III);

ОН – опорный наполнитель (область IV);  $S_1$  – внутренняя поверхность контакта жидкого и затвердевшего металла;

$S_2$  – внутренняя поверхность контакта затвердевшего металла и оболочковой формы;  $S_3$  – внешняя поверхность оболочковой формы;  $S_4$  – свободная поверхность торца литниковой чаши ОФ;

$R$  – радиус шарообразной отливки;  $S$  – толщина оболочковой формы;  $S_T$  – толщина корочки затвердевшего металла;  $\alpha$  – угол наклона литниковой воронки;  $\varphi$  – угол охвата поверхности оболочковой формы опорным наполнителем

**Fig. 1.** General (a) and calculation (b) diagrams of a spherical shell mold (SM) molded in support filler and poured with liquid metal in accordance with the axial symmetry:

ЖМ – liquid metal (area I); ТМ – solid metal (area II); ОФ – shell mold (area III); ОН – support filler (area IV);  $S_1$  – inner contact surface of liquid and solidified metal;  $S_2$  – inner contact surface of solidified metal and shell mold;  $S_3$  – outer surface of the shell mold;

$S_4$  – free surface of the end face of casting cup;  $R$  – radius of the spherical casting;  $S$  – thickness of shell mold;  $S_T$  – thickness of solidified metal crust;  $\alpha$  – slope angle of casting cup;  $\varphi$  – angle of enclosing surface of shell mold with a support filler

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается осесимметричное тело вращения. Деформируемый материал считается изотропным. Движение принимали медленным.

Имеем четырехкомпонентную систему (рис. 1, б). Деформируемой средой является затвердевший металл (область II) и форма (область III) – изотропные материалы. Процесс нестационарный. Используя теорию упругости и Эйлерову систему координат, запишем для каждой из областей систему уравнений:

– для области I:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma = P; \\ P = \gamma h; \theta = \alpha_1 \Delta \theta; \end{aligned} \quad (1)$$

– для областей II, III:

$$\begin{cases} \sigma_{ij} = 0, i, j = 1, 2, 3; \\ \sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij} = 2G_p \varepsilon_{ij}^*; \varepsilon_{ij}^* = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \varepsilon \delta_{ij}; \varepsilon = \varepsilon_{ii}; \\ \varepsilon_{ii} = 3k_p \sigma + 3\alpha_p (\theta - \theta_p^*); \varepsilon_{ij} = 0, 5(U_{ij} + U_{ji}); \\ C_p \gamma \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \text{div}(\lambda \text{grad} \theta); \end{cases} \quad (2)$$

здесь  $\sigma_{ij}$  – компоненты тензора напряжений;  $\sigma$  – гидростатическое напряжение;  $\varepsilon_{ij}$  – компоненты тензора упругих деформаций;  $h$  – высота столба жидкого металла;

$k_p = \frac{1-2\mu}{E}$  – коэффициент объемного сжатия;  $\mu$  – коэффициент Пуассона;  $E$  – модуль Юнга;  $G_p$  – модуль сдвига в среде области  $p$  (II, III);  $\alpha_p$  – коэффициент линейного расширения;  $\alpha_1$  – коэффициент температуропроводности в области I;  $\tau$  – время;  $\theta$  – температура;  $C_p$  – удельная теплоемкость в области  $p$ ;  $\gamma$  – плотность;  $\theta_p^*$  – начальная температура в области  $p$ ;  $\lambda = \lambda(\theta)$  – теплопроводность;

$\sigma_{ij,j} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$ ;  $u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ ; используется суммирование по повторяющимся индексам.

В соответствии с осевой симметрией рассмотрим меридианное сечение (рис. 1, б).

При условии  $\theta_m \leq \theta_k$  ( $\theta_m$  и  $\theta_k$  – температуры металла и кристаллизации) в процессе охлаждения жидкого металла его температура определяется толщиной затвердевшего слоя  $\Delta_i$  из решения уравнения межфазового перехода [5].

Начальные условия задачи:

$\Delta_i|_{\tau=0} = 0$  – отсутствие твердой фазы металла;

$\theta_{I|_{\tau=0}}^* = 0 = \theta_m^*$  – температура разливаемого жидкого металла;

$\theta_{III|_{\tau=0}}^* = \theta^*$  – начальная температура формы.

Граничные условия задачи (рис. 1, б):

– на оси симметрии:  $U_2 = 0$ ;  $\sigma_{21} = 0$ ;  $q_n = 0$ ;

– на поверхностях  $S_1, S_3, S_4$

$$\begin{aligned} \sigma_{11}|_{S_1} &= -P; \quad \sigma_{12}|_{S_1} = 0; \quad U_1|_{S_3} = 0; \quad \sigma_{22}|_{S_4} = 0; \\ \sigma_{12}|_{S_3} &= -\psi \frac{U_{ck}}{U^*} \operatorname{con}(n_1 x_1); \quad \theta|_{S_3} = \theta^*; \end{aligned} \quad (3)$$

здесь  $U_{ck}$  – скольжение материала формы относительно песка;  $U^*$  – нормирующее перемещение;  $\psi$  – параметр, характеризующий условия трения между формой и опорным наполнителем.

Для решения системы (2) использовался численный метод [32]. Согласно этому методу область деформирования разбивается на конечное число ортогональных криволинейных элементов (рис. 2, а).

При осевой симметрии имеем  $\sigma_{31} = \sigma_{32} = 0$ ;  $\sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$ ;  $U_3 = 0$ .

В соответствии с работой [32], уравнения (2) и значения  $\varepsilon_{ii}$  с учетом осевой симметрии запишутся:

$$\begin{aligned} S_{13} \Delta S_{12} (\sigma_{11} - \sigma_{22}) + S_{12} S_{13} (\sigma_{11} - \sigma_{33}) + \\ + 0,5 \Delta \sigma_{11} S_{12} S_{13} + 0,5 \Delta \sigma_{12} S_{21} S_{23} + \\ + (S_{21} \Delta S_{23} + 2 S_{23} \Delta S_{21}) \sigma_{21} = 0; \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} S_{21} \Delta S_{23} (\sigma_{22} - \sigma_{33}) + S_{23} S_{21} (\sigma_{22} - \sigma_{11}) + \\ + 0,5 \Delta \sigma_{22} S_{23} S_{21} + 0,5 \Delta \sigma_{21} S_{12} S_{13} + \\ + (S_{12} \Delta S_{13} + 2 S_{13} \Delta S_{12}) \sigma_{21} = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{11} - \sigma_{22} &= 2G_p (\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}); \\ \sigma_{22} - \sigma_{33} &= 2G_p (\varepsilon_{22} - \varepsilon_{33}); \end{aligned} \quad (5)$$

$$\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = 3k_p \sigma + 3\alpha_p (\theta - \theta_p^*); \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{2\Delta U_1}{S_{21}} + \frac{2U_2}{S_{21}} \frac{\Delta S_{21}}{S_{12}}; \quad \varepsilon_{22} = \frac{2\Delta U_2}{S_{32}} + \frac{2U_1}{S_{12}} \frac{\Delta S_{12}}{S_{21}}; \\ \varepsilon_{33} &= \frac{2U_1}{S_{13}} \frac{\Delta S_{13}}{S_{31}} + \frac{2U_2}{S_{23}} \frac{\Delta S_{23}}{S_{32}}; \end{aligned} \quad (7)$$

здесь  $U_i = U_i^1 + U_i^2$ ,  $\Delta U_i = U_i^2 - U_i^1$ , ( $i = 1, 2$ );  $S_{ij} = S_{ij}^1 + S_{ij}^2$ ;  $\Delta S_{ij} = S_{ij}^2 - S_{ij}^1$ .

Принятая символика описана в работах [1; 7].

Уравнения (4) – (7) записаны с учетом того, что  $\frac{\partial U_1}{\partial x_3} = 0$ ,  $\frac{\partial \sigma_{3i}}{\partial x_3} = 0$ ;  $i = 1, 2, 3$ ; для тел вращения имеет место  $\Delta S_{31} = 0$ ;  $\Delta S_{32} = 0$ ;  $\frac{\Delta U_1}{S_3} = 0$ ;  $\frac{\Delta U_2}{S_3} = 0$ ;  $U_3 = 0$ ;

на поверхности  $x_1 x_3$ :  $S_2^+ - S_2^- = 0$ ; на поверхности  $x_2 x_3$ :  $S_1^+ - S_1^- = 0$ ; сдвиговые значения  $\varepsilon_{ij}$  ( $i \neq j$ ) запишутся для узла (0) (рис. 2, з) в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon_{12}^0 &= \frac{2\Delta \bar{U}_2}{S_1} - 0,5 \bar{U}_2 \frac{S_2^+ - S_2^-}{S_1 S_2} + \\ &+ \frac{2\Delta \bar{U}_1}{S_2} - 0,5 \bar{U}_1 \frac{S_1^+ - S_1^-}{S_1 S_2}, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $S_i = S_i^1 + S_i^2$ ;  $\Delta \bar{U}_i = \bar{U}_i^2 - \bar{U}_i^1$ ;  $S_i^+ = S_i^{1+} + S_i^{2+}$ ;  $S_i^- = S_i^{1-} + S_i^{2-}$ ;  $\bar{U}_i$  – среднее от значения  $U_i$  по граням элемента.

В работе [32] доказано, что разностный аналог системы (4) – (6) с учетом уравнения (7) при наличии начальных и граничных условий является определенным. Размерность системы (4) – (6) значительно сокращается при осуществлении следующих операций.

1. Разности  $(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^0)$  в уравнениях (4) выражаются через формулу (5).

2. Уравнение сохранения массы переписывается в рекуррентной форме с учетом выражений (7) в виде  $U_1^2 = U_1^1 + [A]$ ; здесь  $[A]$  – оператор, не содержащий  $U_1^2$ ; направление обхода области по  $x_1$  ( $\rightarrow$ ), по  $x_2$  ( $\uparrow$ ).

3. Определяются сдвиговые выражения  $\varepsilon_{ij}$  ( $i \neq j$ ) по внутренним узлам сетки в соответствии с формулами (8);  $i = 1, j = 2$ .

4. Определяются значения  $\sigma_{ij}$  ( $i \neq j$ ) по внутренним узлам сетки из уравнений состояния  $\sigma_{12}^0 = G_p^0 \varepsilon_{12}^0$ .

5. Определяются величины  $\sigma_{ij}$  по внешним узлам сетки из граничных условий, а на контактных поверхностях – из закона трения.

6. Определяются  $\sigma_{ij}$  по граням элементов как средние от значений  $\sigma_{ij}$  в узлах граней.

7. Первое уравнение (4) переписывается в рекуррентном виде  $\sigma_{11}^1 = \sigma_{11}^2 + [B]$ ; здесь  $[B]$  – оператор, не содержащий  $\sigma_{11}^1$ ; направление обхода области по  $x_1$  ( $\leftarrow$ ), по  $x_2$  ( $\downarrow$ ).

8. Из системы уравнений (второе уравнение в системе (4) и уравнение  $\sigma_{22} - \sigma_{11} = 2\lambda(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22})$ ) определяются значения  $\sigma_{22}^1$  и  $\sigma_{22}^2$  для элемента, составляются уравнения вида  $F_3 = (\sigma_{22}^2)_J - (\sigma_{22}^1)_{J+1} = 0$  для внутренних граней (где  $J$  – индекс элемента по координате  $x_2$ ).

Таким образом, если считать независимыми переменными  $X = \{U_2, U_1|_{x_1=0}, \sigma_{11}|_{x_1} = x_1^*\}$ , то по последовательности (1) – (7) можно определить зависимые переменные через  $X$  ( $x_1^*$  – конечное значение координаты  $x$  по криволинейной области).

Эквивалентная система уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} F_1 &= (U_1^2 - U_1^*)|_{x_1=x_1^*} = 0; \\ F_2 &= (\sigma_{11}^1 - \sigma_{11}^*)|_{x_1=0} = 0; \\ F_3 &= 0; \end{aligned} \quad (9)$$

здесь  $U_1^*$  – известные из граничных условий перемещения  $U_1$  на границе области ( $x_1 = x_1^*$ );  $\sigma_{11}^*$  – известные из граничных условий напряжения  $\sigma_{11}$  на границе области ( $x_1 = 0$ ).

Уравнений  $F_1 = 0$  столько, сколько неизвестных  $\sigma_{11}|_{x_1=x_1^*}$ , а уравнений  $F_2 = 0$  столько, сколько неизвестных  $U_1|_{x_1=0}$ .

Коэффициенты и свободные члены новой эквивалентной системы уравнений (9) можно найти с помощью следующей процедуры.

Пусть эквивалентная система уравнений имеет вид

$$\bar{F}_i = \alpha_{ij} x_j + b_i = 0; \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (10)$$

Если считать, что все неизвестные равны нулю ( $x_i = 0, i = 1, \dots, n$ ), то по вышеприведенной последовательности (1) – (7) и расчете  $\bar{F}_i^k$  по формулам (9) найдем свободные члены новой системы (10):

$$\bar{F}_i^0 = b_i; i = 1, \dots, n.$$

Далее находим коэффициенты  $a_{ij}$ . Для этого считаем  $x_k = 1, x_i = 0 (i \neq k; i = 1, \dots, n)$ . По указанной выше последовательности находим значение  $\bar{F}_i^k$  и  $a_{ik}$  по следующей формуле:

$$a_{ik} = F_i^k - F_i^0, i = 1, \dots, n.$$

Таким образом, определяется вся матрица  $a_{ik}$  новой эквивалентной системы, которая решается по стандартной программе. Размерность эквивалентной системы сокращается примерно в 10 раз по сравнению с исходной.

Для решения уравнения теплопроводности используется численный метод [1; 32]. В соответствии с рассматриваемым методом для каждого внутреннего  $k$ -го элемента (рис. 2, а) записывается из теплового баланса система теплопроводности в разностном виде с учетом

осевой симметрии и строится итерационная процедура, которая с учетом того, что тепловой поток по  $x_3$  равен нулю, представляется итерационной формулой:

$$\begin{aligned} \theta_k &= \frac{\theta_k^* + t_{12}\theta_1^+ + t_{11}\theta_1^- + t_{22}\theta_2^+ + t_{21}\theta_2^-}{1 + t_{12} + t_{11} + t_{22} + t_{21}}; \\ t_{12} &= \frac{2(\lambda_k + \lambda_1^+)}{S_{21} + S_{21}^+} F_1^2 \frac{\Delta\tau}{C_k \gamma_k V_k}; \\ t_{11} &= \frac{2(\lambda_k + \lambda_1^-)}{S_{21} + S_{21}^-} F_1^1 \frac{\Delta\tau}{C_k \gamma_k V_k}; \\ t_{22} &= \frac{2(\lambda_k + \lambda_2^+)}{S_{12} + S_{12}^+} F_2^2 \frac{\Delta\tau}{C_k \gamma_k V_k}; \\ t_{21} &= \frac{2(\lambda_k + \lambda_2^-)}{S_{12} + S_{12}^-} F_2^1 \frac{\Delta\tau}{C_k \gamma_k V_k}; \\ F_i^j &= S_{ik}^j S_{ip}^j; i \neq k \neq p; i, k, p = 1, 2, 3; j = 1, 2; \\ V_k &= \frac{S_{13} S_{12} (S_{21} + S_{31})}{16}; \end{aligned} \tag{11}$$

здесь  $\theta_k^*$  – средняя температура в  $k$ -ом элементе в начале временного шага  $\Delta\tau$ ;  $\lambda_k, \theta_k, C_k, \gamma_k$  – средние теплопро-

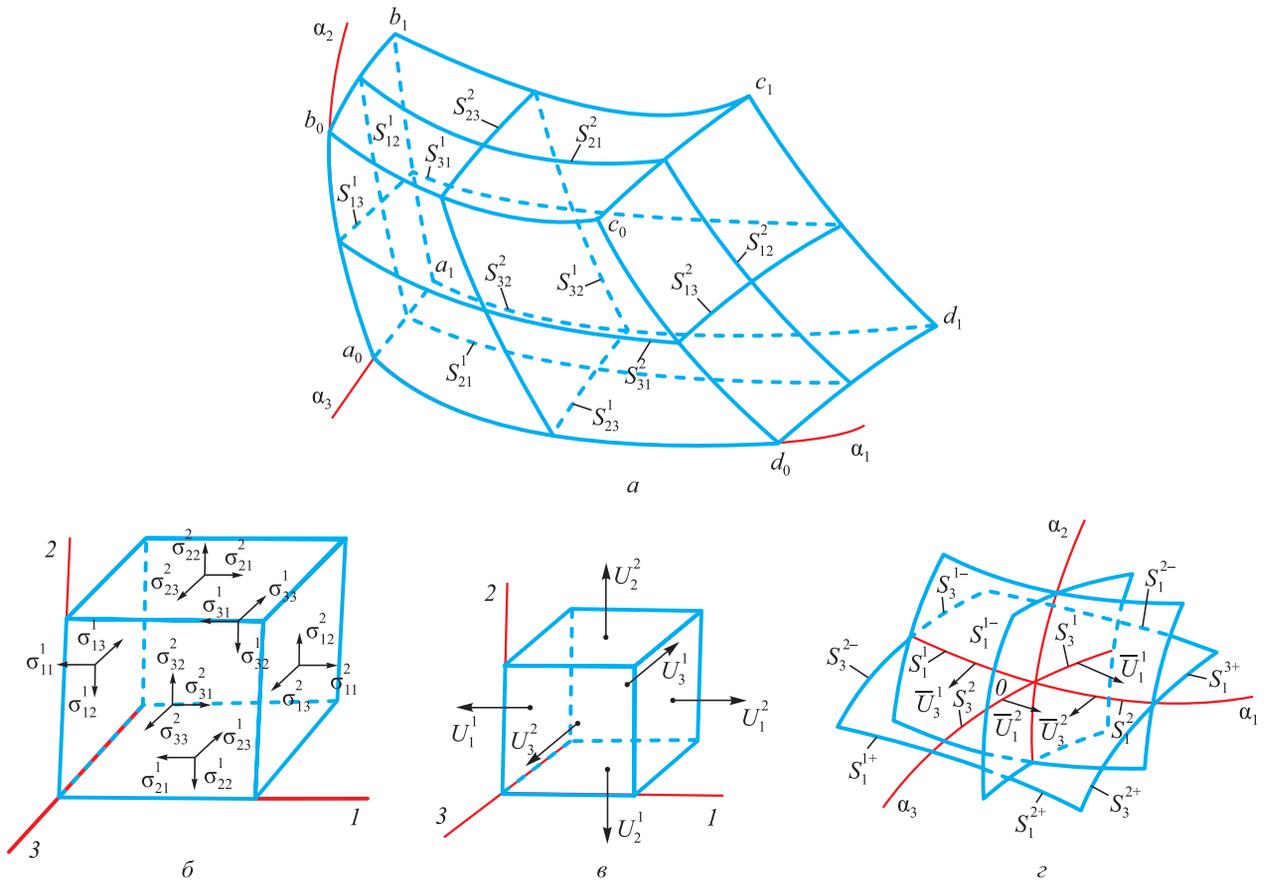


Рис. 2. Область деформирования:

а – схема разбивки на элементы; б – распределение напряжений; в, г – распределение перемещений по граням элемента

Fig. 2. Deformation zone:

a – scheme of breakdown into elements; б – distribution of stresses; в, г – distribution of displacements along the element edges

водность, температура, теплоемкость и плотность в  $k$ -ом элементе в конце временного шага  $\Delta\tau$ ;  $\lambda_i^-$ ,  $\theta_i^-$  и  $\lambda_i^+$ ,  $\theta_i^+$ , ( $i = 1, 2$ ) – теплопроводность и температура в элементе, следующим за элементом  $k$  по координате  $x_i$  в отрицательном и положительном направлениях  $x_i$ ;  $S_{21}^- = S_{21}^{1-} + S_{21}^{2-}$ ;  $S_{21}^+ = S_{21}^{1+} + S_{22}^{2+}$ ;  $S_{ij}^{1+}$  ( $i \neq j$ ;  $i, j = 1, 2$ ) и  $S_{ij}^{1-}$  – длина дуги  $S_{ij}^1$  элемента, следующим за элементом  $k$  в положительном и отрицательном направлениях по координате  $x_j$ .

В работе [32] доказывается сходимость итерационной процедуры (11).

### АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

1. Время охлаждения  $\tau^*$  разбивается на конечное число шагов:  $\tau^* = \sum \Delta\tau_n$ ; здесь  $n$  – номер временного шага.

2. Исследуемая область разбивается на конечное число ортогональных элементов.

3. Задаются начальные и граничные условия по элементам, образующих рассматриваемую область, и константы физико-механических свойств материалов.

4. Вычисляются длины дуг элементов  $S_{ik}^j$  ( $i, k = 1, 2$ ;  $i \neq k$ ;  $j = 1, 2$ ).

5. Определяется поле температур на временном шаге  $\Delta\tau_n$  численным решением уравнения теплопроводности с использованием итерационной формулы (11) при наличии начальных и граничных условий на рассматриваемом временном шаге.

6. Если температура в области  $I$  у поверхности  $S_2$   $\theta|_{S_2} \leq \theta_k$ , то вычисляется толщина  $\Delta l$  закристаллизовавшейся корочки [5]. Если  $\theta|_{S_2} > \theta_k$ , то выполняется следующая операция.

7. Решается система уравнений (2) с учетом разностных аналогов (4) – (7) и разработанной методики [1; 32], описанной выше. Определяются поля напряжений  $\sigma_{ij}$  и перемещений  $U_i$  ( $i, j = 1, 2$ ).

8. Проводится шаг по времени; если  $\sum \Delta\tau_n < \tau^*$ , то выполняется операция 4; если  $\sum \Delta\tau_n = \tau^*$  – процесс вычисления закончен.

При решении температурной задачи использовали граничные условия первого рода (3). Для определения  $\theta_m(\tau)$  и  $\theta^*(\tau)$  воспользуемся экспериментальными данными работы [1]. Аппроксимируя эти величины, получим следующее:

$$\theta_m = 1550 - 1,666\tau - \frac{\tau(60 - \tau)}{10 + \tau^2};$$

$$\theta \leq \tau \leq 60 \text{ с};$$

$$\theta^* = 20 + 17,3\sqrt{\tau};$$

здесь  $\tau$  – время охлаждения, с.

Время  $\tau$  не превышает 60 с, так как при  $\tau \geq 60$  с напряжения в ОФ падают и не представляют опасности ее разрушения.

Разработана математическая модель по определению НДС и температуры в ОФ при охлаждении в ней сферической отливки, с использованием которой проведено численное решение задачи по моделированию трещиностойкости сферической ОФ.

### Выводы

Предпринята первая теоретическая попытка по формулированию и решению задачи определения внешних факторов, при которых сферическая оболочковая форма не будет разрушаться от возникающих в ней температурных напряжений.

На основе основополагающих уравнений теории упругости и численных методов разработаны численная схема и алгоритм решения задачи.

Предложенная методика моделирования стойкости сферической оболочки к трещинообразованию может быть рекомендована для моделирования на других функциональных оболочках.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ / REFERENCES

- Одинок В.И., Дмитриев Э.А., Евстигнеев А.И., Свиридов А.В. Математическое моделирование процессов получения отливок в керамические оболочковые формы. Москва: Инновационное машиностроение; 2020:224.
- Евстигнеев А.И., Одинок В.И., Дмитриев Э.А., Свиридов А.В., Иванкова Е.П. Влияние внешнего теплового воздействия на напряженное состояние оболочковых форм по выплавляемым моделям. *Математическое моделирование*. 2021;33(1):63–76. <https://doi.org/10.20948/mm-2021-01-05>  
Evstigneev A.I., Odinokov V.I., Dmitriev E.A., Sviridov A.V., Ivankova E.P. The influence of external heat exposure on the stress state of shell forms by smelting models. *Matematicheskoe modelirovanie*. 2021;33(1):63–76. (In Russ.). <https://doi.org/10.20948/mm-2021-01-05>
- Одинок В.И., Дмитриев Э.А., Евстигнеев А.И. и др. Моделирование и оптимизация выбора свойств материалов и структур оболочковых форм по выплавляемым моделям. *Известия вузов. Черная металлургия*. 2020;63(9):742–754. <https://doi.org/10.17073/0368-0797-2020-9-742-754>  
Odinokov V.I., Dmitriev E.A., Evstigneev A.I., Sviridov A.V., Ivankova E.P. Choice of materials properties and of shell molds structure by investment models. *Izvestiya. Ferrous Metallurgy*. 2020;63(9):742–754. (In Russ.). <https://doi.org/10.17073/0368-0797-2020-9-742-754>
- Одинок В.И., Дмитриев Э.А., Евстигнеев А.И., Чернышова Д.В., Евстигнеева А.А. Влияние опорного наполнителя и структуры оболочковой формы на ее трещиностойкость. *Известия вузов. Черная металлургия*. 2022;65(4):285–293. <https://doi.org/10.17073/0368-0797-2022-4-285-293>  
Odinokov V.I., Evstigneev A.I., Dmitriev E.A., Chernyshova D.V., Evstigneeva A.A. Influence of support filler and structure of shell mold on its crack resistance. *Izvestiya. Ferrous Metallurgy*. 2022;65(4):285–293. (In Russ.). <https://doi.org/10.17073/0368-0797-2022-4-285-293>

5. Евстигнеев А.И., Дмитриев Э.А., Чернышева Д.В., Одинков В.И., Евстигнеева А.А., Иванкова Е.П. Моделирование внешнего силового воздействия на стойкость оболочковой формы при заливке в нее стали. *Математическое моделирование*. 2022;34(5):61–72. <https://doi.org/10.20948/mm-2022-05-04>  
Evstigneev A.I., Dmitriev E.A., Chernysheva D.V., Odinkov V.I., Evstigneeva A.A., Ivankova E.P. Modeling of external force action on a shell mold for pouring steel. *Matematicheskoe modelirovanie*. 2022;34(5):61–72. (In Russ.). <https://doi.org/10.20948/mm-2022-05-04>
6. Bansode S.N., Phalle V.M., Mantha S.S. Optimization of process parameters to improve dimensional accuracy of investment casting using Taguchi approach. *Advances in Mechanical Engineering*. 2019;11(4):1–12. <https://doi.org/10.1177/1687814019841460>
7. Mittal Y.G., Kamble P., Gote G., Patil Y., Patel A. K., Bernard A., Karunakaran K.P. Mathematical modelling of pattern sublimation in rapid ice investment casting. *International Journal of Metalcasting*. 2022;16(2):1002–1009. <http://dx.doi.org/10.1007/s40962-021-00665-w>
8. Kanyo J.E., Schafföner S., Uwanyuze R.S., Leary K.S. An overview of ceramic molds for investment casting of nickel superalloys. *Journal of the European Ceramic Society*. 2020;40(15):4955–4973. <https://doi.org/10.1016/j.jeurceramsoc.2020.07.013>
9. Rafique M.M.A., Iqbal J. Modeling and simulation of heat transfer phenomena during investment casting. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 2009;52(7–8):2132–2139. <http://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2008.11.007>
10. Singh R. Mathematical modeling for surface hardness in investment casting applications. *Journal of Mechanical Science and Technology*. 2012;26:3625–3629. <http://dx.doi.org/10.1007/s12206-012-0854-0>
11. Jafari H., Idris M. H., Ourdjini A. Effect of thickness and permeability of ceramic shell mould on in situ melted AZ91D investment casting. *Applied Mechanics and Materials*. 2014;465–466:1087–1092. <http://dx.doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMM.465-466.1087>
12. Bansode S.N., Phalle V.M., Mantha S. Taguchi approach for optimization of parameters that reduce dimensional variation in investment casting. *Archives of Foundry Engineering*. 2019;19(1):5–12. <https://dx.doi.org/10.24425/afe.2018.125183>
13. Pattnaik S., Karunakar D.B., Jha P.K. Developments in investment casting process – A review. *Journal of Materials Processing Technology*. 2012;212(11):2332–2348. <https://doi.org/10.1016/j.jmatprotec.2012.06.003>
14. Zhang J., Li K.W., Ye H.W., Zhang D.Q., Wu P.W. Numerical simulation of solidification process for impeller investment casting. *Applied Mechanics and Materials*. 2011;80–81:961–964. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMM.80-81.961>
15. Dong Y.W., Li X.L., Zhao Q., Jun Y., Dao M. Modeling of shrinkage during investment casting of thin walled hollow turbine blades. *Journal of Materials Processing Technology*. 2017;244:190–203. <https://doi.org/10.1016/j.jmatprotec.2017.01.005>
16. Rakoczy Ł., Cygan R. Analysis of temperature distribution in shell mould during thinwall superalloy casting and its effect on the resultant microstructure. *Archives of Civil and Mechanical Engineering*. 2018;18(4):1441–1450. <https://doi.org/10.1016/j.acme.2018.05.008>
17. Yameng W., Zhigang L. The design of testing methods for strength of ceramic shell mold in investment casting. *Proceedings of the Asia-Pacific Conf. on Intelligent Medical 2018 & Int. Conf. on Transportation and Traffic Engineering*. 2018;336–341. <https://doi.org/10.1145/3321619.3321686>
18. Kolczyk J., Zych J. High temperature strength of ceramic moulds applied in the investment casting method. *Archives of Foundry Engineering*. 2011;11(3):121–124.
19. Anglada E., Meléndez A., Maestro L., Domínguez I. Finite element model correlation of an investment casting process. *Materials Science Forum*. 2014;797:105–110. <http://dx.doi.org/10.4028/www.scientific.net/MSF.797.105>
20. Liu C., Sun J., Lai X., He B., Li F. Influence of complex structure on the shrinkage of part in investment casting process. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*. 2015;77:1191–1203. <https://doi.org/10.1007/s00170-014-6523-y>
21. Liu C., Wang F., Jin S., Li F., Lai X. Permafrost analysis methodology (PAM) for ceramic shell deformation in the firing process. *International Journal of Metalcasting*. 2019;13(4):953–968. <http://dx.doi.org/10.1007/s40962-019-00317-0>
22. Everhart W.A., Lekakh S.N., Richards V., Chen J., Li H., Chandrashekhara K. Corner strength of investment casting shells. *International Journal of Metalcasting*. 2013;7:21–27. <https://doi.org/10.1007/BF03355541>
23. Sabau A.S. Numerical simulation of the investment casting process. *Transactions of American Foundry Society*. 2005;113:407–417.
24. Zheng K., Lin Y., Chen W., Liu L. Numerical simulation and optimization of casting process of copper alloy water-meter shell. *Advances in Mechanical Engineering*. 2020;12(5):1–12. <http://dx.doi.org/10.1177/1687814020923450>
25. Manzari M.T., Gethin D.T., Lewis R.W. Optimisation of heat transfer between casting and mould. *International Journal of Cast Metals Research*. 2000;13(4):199–206. <https://doi.org/10.1080/13640461.2000.11819402>
26. Rafique M.M.A., Shah U. Modeling and simulation of heat transfer phenomenon related to mold heating during investment casting. *Engineering*. 2020;12(5):291–314. <http://dx.doi.org/10.4236/eng.2020.125024>
27. Dong Y., Bu K., Zhang D. Numerical simulation of displacement field of solidification process for investment casting. In: *2008 Asia Simulation Conf. – 7<sup>th</sup> Int. Conf. on System Simulation and Scientific Computing*. 2008:715–720. <https://doi.org/10.1109/asc-icsc.2008.4675453>
28. Upadhya G.K., Das S., Chandra U., Paul A.J. Modelling the investment casting process: a novel approach for view factor calculations and defect prediction. *Applied Mathematical Modelling*. 1995;19(6):354–362. [https://doi.org/10.1016/0307-904X\(95\)90001-0](https://doi.org/10.1016/0307-904X(95)90001-0)
29. Khan M.A.A., Sheikh A.K. Simulation tools in enhancing metal casting productivity and quality: A review. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part B: Journal of Engineering Manufacture*. 2016;230(10):1799–1817. <https://doi.org/10.1177/09544405416640183>
30. Banerjee S., Sutradhar G. Analysis of casting defects in investment casting by simulation. *Advances in Materials, Mechanical and Industrial Engineering: Selected Contributions from the First Int. Conf. on Mechanical Engineering, Jadavpur University, Kolkata, India*. Springer International

Publishing. 2019:247–271.

[http://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-96968-8\\_12](http://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-96968-8_12)

31. Евстигнеев А.И., Одинок В.И., Дмитриев Э.А., Чернышова Д.В., Евстигнеева А.А., Иванкова Е.П. О трещиностойкости керамической оболочковой формы по выплавляемым моделям при затвердевании в ней шарообразной стальной отливки. *Литейное производство*. 2022;(9):17–21.

Evstigneev A.I., Odinokov V.I., Dmitriev E.A., Chernyshova D.V., Evstigneeva A.A., Ivankova E.P. On the crack resistance of a ceramic shell mold according to smelted models when a spherical steel casting solidifies in it. *Liteinoe proizvodstvo*. 2022;(9):17–21. (In Russ.).

32. Одинок В.И., Каплунов Б.Г., Песков А.В., Баков А.В. Математическое моделирование сложных технологических процессов. Москва: Наука; 2008:178.

## Сведения об авторах

## Information about the Authors

**Валерий Иванович Одинок**, д.т.н., профессор, главный научный сотрудник Управления научно-исследовательской деятельностью, Комсомольский-на-Амуре государственный университет  
**ORCID:** 0000-0003-0200-1675  
**E-mail:** 79122718858@yandex.ru

**Valeriy I. Odinokov**, Dr. Sci. (Eng.), Prof., Chief Researcher of the Department of Research Activities, Komsomolsk-on-Amur State University  
**ORCID:** 0000-0003-0200-1675  
**E-mail:** 79122718858@yandex.ru

**Алексей Иванович Евстигнеев**, д.т.н., профессор, главный научный сотрудник Управления научно-исследовательской деятельностью, Комсомольский-на-Амуре государственный университет  
**ORCID:** 0000-0002-9594-4068  
**E-mail:** diss@knastu.ru

**Aleksei I. Evstigneev**, Dr. Sci. (Eng.), Prof., Chief Researcher of the Department of Research Activities, Komsomolsk-on-Amur State University  
**ORCID:** 0000-0002-9594-4068  
**E-mail:** diss@knastu.ru

**Эдуард Анатольевич Дмитриев**, д.т.н., доцент, ректор, Комсомольский-на-Амуре государственный университет  
**ORCID:** 0000-0001-8023-316X  
**E-mail:** rector@knastu.ru

**Eduard A. Dmitriev**, Dr. Sci. (Eng.), Assist. Prof., Rector, Komsomolsk-on-Amur State University  
**ORCID:** 0000-0001-8023-316X  
**E-mail:** rector@knastu.ru

**Александр Николаевич Намоконов**, аспирант, Комсомольский-на-Амуре государственный университет  
**ORCID:** 0009-0003-9269-7713  
**E-mail:** namokonovsasha@mail.ru

**Aleksandr N. Namokonov**, Postgraduate, Komsomolsk-on-Amur State University  
**ORCID:** 0009-0003-9269-7713  
**E-mail:** namokonovsasha@mail.ru

**Анна Алексеевна Евстигнеева**, студент кафедры «Прикладная математика», Комсомольский-на-Амуре государственный университет  
**ORCID:** 0000-0003-0667-2468  
**E-mail:** annka.ewstic@mail.ru

**Anna A. Evstigneeva**, Student of the Chair "Applied Mathematics", Komsomolsk-on-Amur State University  
**ORCID:** 0000-0003-0667-2468  
**E-mail:** annka.ewstic@mail.ru

**Дарья Витальевна Чернышова**, аспирант кафедры «Авиационное», Комсомольский-на-Амуре государственный университет  
**ORCID:** 0000-0001-5142-2455  
**E-mail:** daracernysova744@gmail.com

**Dar'ya V. Chernyshova**, Postgraduate of the Chair of Aircraft Engineering, Komsomolsk-on-Amur State University  
**ORCID:** 0000-0001-5142-2455  
**E-mail:** daracernysova744@gmail.com

## Вклад авторов

## Contribution of the Authors

**В. И. Одинок** – научное руководство, анализ результатов исследований, редактирование и корректировка финальной версии статьи.

**V. I. Odinokov** – scientific guidance, analysis of research results, editing and correction of the article final version.

**А. И. Евстигнеев** – формирование концепции статьи, определение цели и задачи исследования, анализ результатов исследования, подготовка текста.

**A. I. Evstigneev** – formation of the article concept, definition of the purpose and objectives of the study, analysis of research results, writing the text.

**Э. А. Дмитриев** – проведение расчетов и их анализ, подготовка и корректировка текста.

**E. A. Dmitriev** – conducting calculations and their analysis, writing and correction of the text.

**А. Н. Намоконов** – проведение расчетов, подготовка библиографического списка, обработка графического материала.

**A. N. Namokonov** – conducting calculations, preparation of references, processing of graphic material.

**А. А. Евстигнеева** – проведение расчетов, подготовка текстового и графического материала.

**A. A. Evstigneeva** – conducting calculations, preparation of the text and graphic material.

**Д. В. Чернышова** – обработка расчетных результатов, подготовка графического материала.

**D. V. Chernyshova** – processing of calculated results, preparation of graphic material.

Поступила в редакцию 19.01.2024  
 После доработки 25.01.2024  
 Принята к публикации 01.02.2024

Received 19.01.2024  
 Revised 25.01.2024  
 Accepted 01.02.2024