***Оригинальная статья***
**УДК** 536.2.023:519:669:699.86
**DOI** 10.17073/0368-0797-2022-1-57-65

# Метод определения температуропроводности и коэффициента теплопроводности по температурам поверхности пластины как полуограниченного тела

**А. К. Соколов**

**Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина** (Россия, 153003, Иваново, ул. Рабфаковская, 34)

***Аннотация***. Проведено исследование численно-аналитической модели полуограниченного тела, которая использовалась для одновременного определения теплофизических характеристик (ТФХ): температуропроводности $a_т$ и коэффициента теплопроводности $\lambda_т$ материала, по которым легко определить объемную теплоемкость $c_т$. Распределение температур по сечению пластины в конце расчетного интервала времени $\tau$ описано степенной функцией, показатель которой $n$ зависел от числа Фурье Fo. Величины ТФХ рассчитывались по динамике изменения температур поверхностей пластины $T(x_п = R_п, \tau)$ и $T(x_п = 0, \tau)$ толщиной $R_п$, нагреваемой при граничных условиях второго рода $q$ = const. По температуре $T(x_п = 0, \tau)$ определялся момент времени $\tau_к$, в который температурное возмущение достигало адиабатной поверхности $x_п = 0$ $(T(R_п, \tau_к) - T_н(0, \tau = 0) = 0{,}1$ К). Вычисления ТФХ ($a_т$ и $\lambda_т$) выполнялись по формулам, параметры которых находились решением нелинейной системы из трех алгебраических уравнений путем подбора числа Фурье, соответствующего $\tau_к$. Исследование трудоемкости и точности расчета ТФХ выполнено по тестовым (исходным) температурным полям пластины из огнеупорного материала, рассчитанным методом конечных разностей. Зависимости ТФХ от температуры $a_и(T)$, $\lambda_и(T)$ и $c_и(T)$ задавались полиномами. Температуры пластины толщиной $R_п = 0{,}04$ м с начальными условиями $T_н = T(x_п, \tau = 0) = 300, 900, 1200, 1800$ К $(0 \le x_п \le R_п)$ были рассчитаны при удельном потоке теплоты $q = 5000$ Вт/м$^2$. Время нагрева до $\tau_к$ составляло 105 – 150 с. Среднемассовая температура пластины $T_{ср,\,пл}$ за время $\tau_к$ увеличивалась на 5 – 11 К. Значения ТФХ восстанавливались решением обратной задачи теплопроводности для десяти моментов времени $\tau_{i+1} = \tau_i + \Delta\tau$. Среднеарифметические отклонения ТФК ($T_{ср,\,пл}$) от исходных значений для расчетов при $T_н = 300, 900, 1200, 1800$ К составили менее 2,5 %. Установлено, что значения $a_т$ и $\lambda_т$, полученные для моментов времени $\tau_i$, практически постоянны, следовательно возможен упрощенный расчет $a_{т,\,о}$ и $\lambda_{т,\,о}$ только по значениям температур $T(R_п, \tau_к)$ и $T(0, \tau_к)$ в конце нагрева. Значения $a_{т,\,о}$ и $\lambda_{т,\,о}$, которые были рассчитаны сразу для всего времени нагрева, отличались от исходных значений принятых условий теплообмена примерно на 2 %. Параметры простых алгебраических формул для расчета $a_{т,\,о}$ и $\lambda_{т,\,о}$ находились решением системы из трех нелинейных уравнений $n = n(\text{Fo})$, $a_{т,\,о} = a(T_н, T(R_п, \tau_к), R_п, n, \tau_к)$, $\text{Fo} = \text{Fo}(a_{т,\,о}, R_п, \tau_к)$ и выражения для $\lambda_{т,\,о} = \lambda(R_п, q, n, T_н, T(R_п, \tau_к))$. Предложенный метод значительно упрощает решение обратной задачи теплопроводности.

***Ключевые слова:*** полуограниченное тело, огнеупор, обратная задача температуропроводности, постоянный поток теплоты, адиабата, температуропроводность, коэффициент теплопроводности, численный эксперимент

***Для цитирования:*** Соколов А.К. Метод определения температуропроводности и коэффициента теплопроводности по температурам поверхности пластины как полуограниченного тела // Известия вузов. Черная металлургия. 2022. Т. 65. № 1. С. 57–65.
*https://doi.org/10.17073/0368-0797-2022-1-57-65*

***Original article***

# Method for determining the thermal diffusivity and thermal conductivity coefficient by temperatures of plate surface as a semi-bounded body

**A. K. Sokolov**

**Ivanovo State Power University named after V.I. Lenin** (34 Rabfakovskaya Str., Ivanovo 153003, Russian Federation)

***Abstract***. The studied numerical and analytical model of a semi-bounded body is used to simultaneously determine the thermophysical characteristics (TFC): thermal diffusivity $a_t$ and thermal conductivity coefficient $\lambda_t$ of the material which make it easy to determine the volumetric heat capacity $c_t$. Temperature distribution over the plate cross-section at the end of the calculated time interval $\tau$ is described by a power function, its exponent $n$ depends on the Fourier number Fo. The values of TFC were calculated from the dynamics of changes in surface temperatures $T(x_p = R_p, \tau)$ and $T(x_p = 0, \tau)$ of the plate with a thickness $R_p$ heated under boundary conditions of the second kind $q$ = const. The temperature $T(x_p = 0, \tau)$ was used to determine the time moment $\tau_e$, at which the temperature perturbation reached the adiabatic surface $x_p = 0$ ($T(R_p, \tau_e) - T_b(0, \tau_e = 0) = 0.1$ K). Calculations of TFC ($a_t$ and $\lambda_t$) were performed using formulas whose parameters were found by solving a nonlinear system of three algebraic equations by selecting the Fourier number corresponding to $\tau_e$. The author studied the complexity and accuracy of TFC calculation using the test (initial) temperature fields of a plate made of refractory material by the finite difference method. Dependences of TFC on the temperature $a_i(T)$, $\lambda_i(T)$ and $c_i(T)$ were set by polynomials. Temperatures of the plate with a thickness of $R_p = 0.04$ m with initial conditions $T_b = T(x_p, \tau = 0) = 300, 900, 1200, 1800$ K ($0 \le x_p \le R_p$) were calculated for a specific heat flow $q = 5000$ W/m$^2$. The heating time to $\tau_e$ was 105 – 150 s. The average mass temperature $T_{m,pl}$ of the plate during the $\tau_e$ increased by 5 – 11 K. The TFC values were restored by solving the inverse thermal diffusivity problem for 10 time points $\tau_{i+1} = \tau_i + \Delta\tau$. The arithmetic mean deviations of TFC ($T_{m,pl}$) from the initial values for calculations at $T_b = 300, 900, 1200, 1800$ K were less than 2.5 %. It was established that the values of $a_t$ and $\lambda_t$ obtained for the time moments $t_i$ are practically constant, therefore, a simplified calculation of $a_{t,o}$ and $\lambda_{t,o}$ is possible only from the values of temperatures $T(R_p, \tau_e)$ and $T(0, \tau_e)$ at the end of heating. The values of $a_{t,o}$ and $\lambda_{t,o}$, which were calculated immediately for the entire heating time, differed from the initial values of the accepted heat exchange conditions by about 2 %. The parameters of simple algebraic formulas for calculating $a_{t,o}$ and $\lambda_{t,o}$ were found by solving a system of three nonlinear equations $n = n(\text{Fo})$, $a_{t,o} = a(T_b, T(R_p, \tau_e), R_p, n, \tau_e)$, $\text{Fo} = \text{Fo}(a_{t,o}, R_p, \tau_e)$ and expressions for $\lambda_{t,o} = \lambda(R_p, q, n, T_b, T(R_p, \tau_e))$. The proposed method significantly simplifies the solution of the inverse problem of thermal conductivity.

***Keywords:*** semi-bounded body, refractory, inverse problem of thermal diffusivity, constant heat flow, adiabatic, thermal conductivity, coefficient of thermal conductivity, numerical experiment

***For citation:*** Sokolov A.K. Method for determining the thermal diffusivity and thermal conductivity coefficient by temperatures of plate surface as a semi-bounded body. *Izvestiya. Ferrous Metallurgy*. 2022, vol. 65, no. 1, pp. 57–65. (In Russ.). *https://doi.org/10.17073/0368-0797-2022-1-57-65*

Теплофизические характеристики (ТФХ) (температуропроводность, коэффициент теплопроводности и теплоемкость) огнеупорных и теплоизоляционных материалов используются при моделировании температурных полей в элементах оборудования, ограждениях печей и других теплотехнологических и теплоэнергетических установок. Они в значительной степени определяют точность расчета температурных полей для оценки безопасности оборудования и технико-экономических показателей установок.

Процедура определения ТФХ материалов, как правило, включает проведение теплофизического эксперимента и определение зависимости их от температуры решением обратных задач теплопроводности.

Совершенствованием методов определения ТФХ занимаются многие коллективы отечественных и зарубежных ученых.

Обзор и анализ методов определения температуропроводности по нестационарным температурным полям дан в монографиях [1 – 4]. Цитирование многих работ с решениями обратных задач теплопроводности представлены в [4, 5].

В работах [1, 5 – 7] описаны методики определения теплофизических свойств материалов, применяемых в металлургии и строительстве.

Значительная часть известных методов [1 – 5] требует уникальных технических устройств, довольно строгого соблюдения граничных условий теплообмена и использования сложного математического аппарата (специальных функций, конечных элементов, процедур оптимизации и приближения, решения систем дифференциальных и алгебраических уравнений и др.). Для применения сложных методов расчета необходима специальная физико-математическая подготовка, которую обычно не получают выпускники технических специальностей университетов.

Основными критериями оптимальности методов определения ТФХ можно считать следующие:

– малая трудоемкость теплофизического эксперимента (простота установки и управления режимом нагрева, минимум точек измерения, исключение точек измерения внутри тела);

– простота метода решения обратной задачи теплопроводности, доступная инженеру теплотехнику;

– возможность комплексного определения нескольких ТФХ по результатам обработки одного температурного поля.

Раздельное определение одной из ТФХ, например, коэффициента теплопроводности $\lambda$ [8 – 11], позволяет упростить проведение эксперимента и решение обратной задачи теплопроводности. Одновременное (комплексное) определение нескольких ТФХ, например, коэффициента теплопроводности $\lambda$ и теплоемкости или $\lambda$ и температуропроводности [12 – 25] требует большего количества измеряемых параметров в эксперименте при незначительном усложнении вычислительного процесса.

Указанные критерии оптимальности обуславливают развитие методов определения ТФХ через процесс решения обратных задач теплопроводности. Например, одношаговый GPS и неитеративная оценка теплопроводности без внутренних измерений [10, 11], использование постоянной мощности при тепловом воздействии [12] или аппроксимирующей функции, описывающей распределение температуры в материале [15], применение бессеточных методов [17]. В большей части упомянутых работ [8 – 25] для оценки точности определения ТФХ используются численные, а не физические эксперименты.

В статье [26] предложен и исследован метод, который в значительной степени удовлетворяет названным критериям оптимальности. Решение обратной задачи теплопроводности основано на численно-аналитической модели полуограниченного тела, разработанной в [26 – 29].

Простоту процедур определения ТФХ в работе [25] характеризуют следующие показатели. При проведении теплофизического эксперимента измерения температур достаточно проводить только на поверхностях пластины, а расчет ТФХ выполнять по простым алгебраическим формулам. В случае нагрева исследуемого материала пластины постоянным потоком теплоты $q$, Вт/м$^2$ можно по одному температурному полю пластины, как полуограниченного тела, определять комплекс ТФХ: температуропроводность $a_т$, м$^2$/с, коэффициент теплопроводности $\lambda_т$, Вт/(м·К), а по ним – теплоемкость $c_т = \dfrac{\lambda_т}{a_т}$, Дж/(м$^3$·К).

Тестирование метода выполнено в [26] по температурному полю пластины, нагреваемой при граничных условиях третьего рода, при которых поток теплоты изменялся. Поэтому по динамике температур на поверхностях пластины $T(x = R_п, \tau)$ и $T(x = 0, \tau)$, где $R_п$ – толщина пластины, м; $\tau$ – время, с, рассчитывалась только температуропроводность $a_т$.

В предлагаемой статье дано описание схемы нагрева пластины потоком теплоты заданной величины и примеры расчета температуропроводности $a_т$ и коэффициента теплопроводности $\lambda_т$ по динамике температур на поверхностях пластины $T(x = R_п, \tau)$ и $T(x = 0, \tau)$ и потоку теплоты $q$. Формулы, по которым выполнены тестовые расчеты, выведены и приведены в [26].

Схема организации теплообмена в пластине, для материала которой следует определить ТФХ, показана на рис. 1. В пластине с исследуемым материалом показаны два расчетных слоя: *1* – прогретый и *2* – не прогретый. В конце эксперимента толщина не прогретого слоя будет равна нулю. Пластина *3* с большей термической массивностью используется для создания адиабатных условий на поверхности $x_п = 0$ [26].

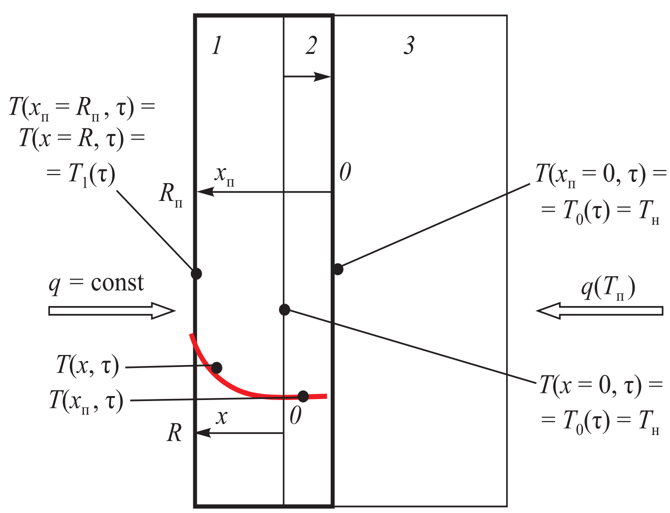


Рис. 1. Схема теплообмена в пластине толщиной $R_п$, нагреваемой потоком теплоты $q$ = const, у которой измеряются температуры поверхностей $T(x_п = R_п, \tau)$ и $T(x_п = 0, \tau)$

Fig. 1. Scheme of heat exchange in a plate with thickness $R_p$ heated by heat flow $q$ = const at which the surface temperatures $T(x_p = R_p, \tau)$ and $T(x_p = 0, \tau)$ are measured

Датчики температуры, например, термопары, установлены на поверхностях пластины $x_п = R_п$ и $x_п = 0$. Перед началом эксперимента в обеих пластинах необходимо задать начальную температуру $T_н = T(x_п, \tau = 0)$ $(0 \le x_п \le R_п)$, для которой будут рассчитываться ТФХ.

Нагрев пластины должен осуществляться постоянным потоком теплоты $q$ = const заданной мощности. Такой поток можно создать электронагревателем с регулируемой мощностью. Для исключения потерь теплоты в окружающую среду целесообразно использовать охранные нагреватели [30]. В процессе нагрева толщина прогреваемого слоя *1* будет увеличиваться. Как только температура на границе между пластинами *1* + *2* и *3* $T(x_п = 0, \tau) = T_0(\tau)$ превысит начальную $T_н$, например на $\Delta T = 0{,}1$ К, температурное возмущение в рабочей пластине достигнет плоскости сопряжения $x_п = 0$, эксперимент закончится $\tau = \tau_к$.

По одному экспериментальному нагреву при начальном условии $T(x_п, \tau = 0) = T_н (0 \le x_п \le R_п)$ можно рассчитать среднеинтегральные значения $a_т$ и $\lambda_т$ только при одной температуре $T \approx T_н$. Для получения табличных зависимостей $a_т(T)$ и $\lambda_т(T)$ потребуется несколько опытов с другими начальными условиями, поэтому перед каждым следующим экспериментом в обеих пластинах необходимо установить (термостатированием) другое значение температуры $T_н$.

Процедуру определения температуропроводности $a_т$ коэффициента теплопроводности $\lambda_т$ рассмотрим на примере их расчета по температурам поверхности пластины $R_п = 0{,}04$ м, которая была прогрета удельным потоком теплоты $q = 5000$ Вт/м$^2$ от $T_н = T(X, \tau = 0) = 1800$ К. Измерения выполнялись для моментов времени $\tau_i$ = 0, 11, 22, 33, … с. Значения температуры обогреваемой поверхности составили $T_1(\tau_i) = T(x = 1, \tau_i)$ = 1800,0; 1808,4; 1811,8; 1814,4; … К. Конечное время эксперимента $\tau_к$ определено по достижению $T(0, \tau_к) = 1800{,}1$ К равным $\tau_к = 105$ с.

Выполним расчет для первых интервалов времени.

1. Вычислим толщину прогретого слоя $R_1$ для $\tau_1 = 11$ с:

$$R_1 = R_п \left(\frac{\tau_1}{\tau_к}\right)^{-2} = 0{,}04 \cdot \left(\frac{11}{105}\right)^{-2} = 0{,}01295 \text{ м.}$$

2. Определим коэффициенты аппроксимации функции распределения температуры $T(X)$ по сечению прогретого слоя $R_1$:

$$T(X) = a_0 + a_1 X^n,\ X = \frac{x}{R}, \qquad (1)$$

$a_0 = T_н = 1800$, $a_1 = T_1(\tau_{i+1}) - T_н = 1808{,}4 - 1800{,}0 = 8{,}4$ К.

3. Решим нелинейную систему из трех уравнений, которые описывают взаимосвязи параметров $n$, $R$ и Fo с известной из эксперимента функцией $T_1(\tau)$:

$$n(\text{Fo}) = 8{,}2052 - 82{,}74\text{Fo}, \quad (2)$$

$$a_{\text{т}} = \frac{a_0 + \dfrac{a_1}{n+1} - T_{\text{ср, ни}}}{na_1 \dfrac{\Delta\tau}{R^2}} = \frac{1800 + \dfrac{8{,}4}{n+1} - 1800}{n \cdot 8{,}4 \cdot \dfrac{11-0}{0{,}01295^2}}; \quad (3)$$

$$\text{Fo} = a_{\text{т}} \frac{\tau_1}{R^2} = a_{\text{т}} \cdot \frac{11}{0{,}01295^2}, \quad (4)$$

где $a_{\text{т}}$ – температуропроводность, м$^2$/с; $n$ – показатель степени в уравнении (1); $T_{\text{ср, ни}}$ – средняя температура слоя $R$ в начале интервала $\Delta\tau_1$ (в данном случае $T_{\text{ср, ни}} = T_{\text{ср}}(\tau_{i=0} = 0) = T_{\text{н}} = 1800$ К); $R$ – текущая толщина прогретого слоя, м; Fo – число Фурье.

Установлено, что нелинейную систему целесообразно решать путем итерационного подбора числа Fo для расчетного интервала времени. Для нахождения Fo с точностью 0,0001 использовалась функция «Сервис»/«Подбор параметра» Microsoft Excel. Решением системы уравнений при задании первого приближения было получено число Fo = 0,0516, по которому определены:

$$n = n(\text{Fo}) = 8{,}2052 - 82{,}74 \cdot 0{,}0516 = 3{,}9338 \text{ и}$$

$$a_{\text{т}} = \frac{1800 + \dfrac{8{,}4}{3{,}9338+1} - 1800}{3{,}9338 \cdot 8{,}4 \cdot \dfrac{11-0}{0{,}01295^2}} = 7{,}851 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}$$

$$\left(\text{проверка Fo} = 7{,}851 \cdot 10^{-7} \cdot \frac{11}{0{,}01295^2} = 0{,}0516\right).$$

4. Коэффициент теплопроводности $\lambda_{\text{т}}$ можно рассчитать по формуле

$$\lambda_{\text{т}} = q\frac{R_1}{na_1} = 5000 \cdot \frac{0{,}01295}{3{,}9338 \cdot 8{,}4} = 1{,}960 \text{ Вт/(м·К)}. \quad (5)$$

5. Рассчитаем для $\tau_1 = 11$ среднемассовую температуру слоя $R_1 = 0{,}01295$:

$$T_{\text{ср, 1}} = a_0 + \frac{a_1}{n+1} = 1800 + \frac{8{,}4}{3{,}9338+1} = 1801{,}7 \text{ К} \quad (6)$$

и среднемассовую температуру всей пластины, включая прогретый $R_1$ и непрогретый $R_{\text{нп}} = (R_{\text{п}} - R_1)$ слои:

$$T_{\text{ср, пл}} = \frac{T_{\text{ср, 1}}R_1 + T_{\text{н}}(R_{\text{п}} - R_1)}{R_{\text{п}}} = \frac{1801{,}7 \cdot 0{,}01295 + 1800(0{,}04 - 0{,}01295)}{0{,}04} = 1800{,}55 \text{ К} \quad (7)$$

($T_{\text{ср, пл}}$ – необязательный параметр, значение $T_{\text{ср, пл}}(\tau = \tau_{\text{к}})$ можно использовать для контроля правильности расчета по балансу теплоты, так как при $\tau = \tau_{\text{к}}$ должно выполнится равенство $T_{\text{ср, пл}} = T_{\text{ср, к}}$).

6. Все параметры для первого расчетного интервала времени вычислены. Подготовим исходные данные для расчета второго интервала нагрева. Определим толщину прогретого слоя в конце второго интервала времени $\tau_2 = 22$ с $R_2 = 0{,}04 \cdot \left(\dfrac{22}{105}\right)^{-2} = 0{,}01831$ м и среднемассовую температуру слоя $R_2$ в начале второго интервала времени:

$$T_{\text{ср, ни, 2}} = \frac{T_{\text{ср, 1}}R_1 + T_{\text{н}}(R_2 - R_1)}{R_2} = \frac{1801{,}7 \cdot 0{,}01295 + 1800(0{,}01831 - 0{,}01295)}{0{,}01831} = 1801{,}2 \text{ К}.$$

Заметим, что расчетные среднемассовые температуры в конце первого интервала и начале второго интервала не равны, так как они относятся к разным толщинам прогретых слоев.

Расчеты второго и последующих интервалов нагрева выполняются аналогично, начиная с п. 2.

7. Рассчитаем коэффициенты $a_0$ и $a_1$ для конца второго интервала $\tau_2 = 22$ с, $\Delta\tau_2 = 22 - 11 = 11$ с:

$$a_0 = T_{\text{н}} = 1800, \; a_1 = T_1(\tau_2) - T_{\text{н}} = 1811{,}8 - 1800{,}0 = 11{,}8 \text{ К}.$$

8. Нелинейная система из трех уравнений

$$n(\text{Fo}) = 8{,}2052 - 82{,}74\text{Fo};$$

$$a_{\text{т}} = \frac{a_0 + \dfrac{a_1}{n+1} - T_{\text{ср, ни}}}{na_1 \dfrac{\Delta\tau}{R^2}} = \frac{1800 + \dfrac{11{,}8}{3{,}9180+1} - 1801{,}2}{3{,}9180 \cdot 11{,}8 \cdot \dfrac{22-11}{0{,}01831^2}};$$

$$\text{Fo} = a_{\text{т}} \cdot \frac{11}{0{,}01831^2}$$

имеет решение при Fo = 0,0518.

Определим $n$(Fo) и температуропроводность $a_{\text{т}}$ в конце второго интервала, зная Fo = 0,0518:

$$n(\text{Fo}) = 8{,}2052 - 82{,}74 \cdot 0{,}0518 = 3{,}9180,$$

$$a_{\text{т}} = \frac{a_0 + \dfrac{a_1}{n+1} - T_{\text{ср, ни}}}{na_1 \dfrac{\Delta\tau}{R^2}} = \frac{1800 + \dfrac{11{,}8}{n+1} - 1801{,}2}{n \cdot 11{,}8 \cdot \dfrac{22-11}{0{,}01831^2}} = 7{,}88 \cdot 10^{-7}.$$

9. Коэффициент теплопроводности $\lambda_т$ по формуле (5)

$$\lambda_т = q\frac{R_2}{na_1} = 5000\cdot\frac{0{,}01831}{3{,}9180\cdot 11{,}8} = 1{,}98\ \text{Вт/(м}\cdot\text{К)}. \quad (8)$$

10. Рассчитаем для $\tau_2$ = 22 с среднемассовую температуру слоя $R_2$ = 0,01831 с по уравнению (6)

$$T_{\text{ср, 2}} = a_0 + \frac{a_1}{n+1} = 1800 + \frac{11{,}8}{3{,}9180+1} = 1802{,}4\ \text{К}$$

и среднемассовую температуру всей пластины

$$T_{\text{ср, пл}} = \frac{T_{\text{ср, 2}}R_2 + T_\text{н}(R_\text{п} - R_2)}{R_\text{п}} = \frac{1802{,}4\cdot 0{,}01831 + 1800(0{,}04 - 0{,}01831)}{0{,}04} = 1801{,}1\ \text{К}. \quad (9)$$

Определим исходные данные для расчета третьего интервала нагрева $\tau_2$ = 33 с.

Рассчитаем толщину прогретого слоя в конце третьего интервала $R_3 = 0{,}04\cdot\left(\frac{33}{105}\right)^{-2}$ = 0,02242 и среднемассовую температуру слоя $R_3$ в начале третьего интервала времени

$$T_{\text{ср, ни, 3}} = \frac{T_{\text{ср, 2}}R_2 + T_\text{н}(R_3 - R_2)}{R_3} = \frac{1802{,}4\cdot 0{,}01831 + 1800(0{,}02242 - 0{,}01831)}{0{,}02242} = 1802{,}0\ \text{К}.$$

Расчеты третьего и последующих интервалов нагрева выполняются аналогично.

Для оценки точности метода расчета $a_т$ и $\lambda_т$ решением обратной задачи теплопроводности проведено его тестирование. Для тестирования использовались заранее рассчитанные температурные поля при потоке теплоты $q$ = const огнеупорного материала с заданными теплофизическими свойствами $a_и$, $c_и$, $\lambda_и$:

$$\lambda_и(T) = 0{,}7416 + 0{,}00069T,\ \text{Вт/(м}\cdot\text{К)};$$

$$c_и(T) = 2100\cdot(7{,}688 + 0{,}00025T),\ \text{Дж/(м}^3\cdot\text{К)};$$

$$a_и(T) = 4{,}701\cdot 10^{-7} + 2{,}347\cdot 10^{-10}T - 3{,}624\cdot 10^{-14}T^2\ \text{м}^2\text{/с}.$$

Расчет температурного поля неограниченной пластины $R_п$ = 0,04 м с теплофизическими свойствами $a_и$, $c_и$ и $\lambda_и$, нагреваемой постоянным потоком теплоты $q$ = 5000 Вт/м$^2$, выполнен методом конечных разностей по программе TRT [29].

Решением обратной задачи теплопроводности следовало определить $a_т$ и $\lambda_т$, а затем сравнить их с исходными значениями $a_и$ и $\lambda_и$, при которых рассчитано исходное (тестовое) температурное поле.

Результаты расчета $T(X = 1) = T_1(\tau_i)$, $T(X = 0) = T_0(\tau_i)$, $T_{\text{ср, пл, и}}(\tau_i)$ при $T_н$ =1800 К и $q$ = 5000 Вт/м$^2$ приведены в табл. 1. В следующих строках табл. 1 приведены ре-

Таблица 1

**Температуры неограниченной пластины и результаты расчета температуропроводности $a_т$ и коэффициента теплопроводности $\lambda_т$ материала**

*Table 1.* **Temperatures of an unlimited plate and the results of calculating the thermal diffusivity $a_t$ and thermal conductivity coefficient $\lambda_t$ of the material**

| $i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Время, с | 0 | 11 | 22 | 33 | 44 | 55 | 66 | 77 | 88 | 99 | 105 |
| $T(X = 1)$ | 1800,0 | 1808,4 | 1811,8 | 1814,4 | 1816,6 | 1818,6 | 1820,3 | 1821,9 | 1823,4 | 1824,8 | 1825,6 |
| $T(X = 0)$ | 1800,0 | 1800,0 | 1800,0 | 1800,0 | 1800,0 | 1800,0 | 1800,0 | 1800,0 | 1800,0 | 1800,0 | 1800,1 |
| $T_{\text{ср, пл, и}}$ | 1800,0 | 1800,6 | 1801,1 | 1801,6 | 1802,2 | 1802,7 | 1803,2 | 1803,8 | 1804,3 | 1804,9 | 1805,1 |
| $a_0$ | | 1800,0 | 1800,0 | 1800,0 | 1800,0 | 1800,0 | 1800,0 | 1800,0 | 1800,0 | 1800,0 | 1800,1 |
| $a_1$ | 0 | 8,4 | 11,8 | 14,4 | 16,6 | 18,6 | 20,3 | 21,9 | 23,4 | 24,8 | 25,5 |
| $\text{Fo}_j$ | | 0,0516 | 0,0518 | 0,0519 | 0,0519 | 0,0517 | 0,0519 | 0,0519 | 0,0519 | 0,0519 | 0,0509 |
| $R_i$ | | 0,0129 | 0,0183 | 0,0224 | 0,0259 | 0,0289 | 0,0317 | 0,0343 | 0,0366 | 0,0388 | 0,0400 |
| $n$ | | 3,9338 | 3,9180 | 3,9122 | 3,9119 | 3,9251 | 3,9117 | 3,9101 | 3,9111 | 3,9104 | 3,9975 |
| $T_{\text{ср, ни, }i}$ | | 1800,0 | 1801,2 | 1802,0 | 1802,5 | 1803,0 | 1803,4 | 1803,8 | 1804,2 | 1804,5 | 1804,9 |
| $T_{\text{ср}}(\tau_i)$ | 1800,0 | 1801,7 | 1802,4 | 1802,9 | 1803,4 | 1803,8 | 1804,1 | 1804,5 | 1804,8 | 1805,1 | 1805,2 |
| $T_{\text{ср,пл}}$ | 1800,0 | 1800,6 | 1801,1 | 1801,6 | 1802,2 | 1802,7 | 1803,3 | 1803,8 | 1804,4 | 1804,9 | 1805,2 |
| $a_{т, i}\cdot 10^7$ | | 7,850 | 7,880 | 7,891 | 7,890 | 7,870 | 7,892 | 7,895 | 7,890 | 7,890 | 7,730 |
| $\lambda_т$ | | 1,96 | 1,98 | 1,99 | 1,99 | 1,98 | 2,00 | 2,00 | 2,00 | 2,00 | 1,96 |

зультаты определения $a_т$ и $\lambda_т$ предложенным методом. Более подробный расчет для первых интервалов времени приведен выше.

Температура $T_0(\tau)$ изменилась на 0,1 К в момент времени $\tau_к = 105$ с (см. табл. 1). Исходные $T_{ср,\,пл,\,и}$ и рассчитанные значения $T_{ср,\,пл}$ практически совпали. Значения $T_{ср,\,пл,\,и}$ можно определить только для численного эксперимента.

Проверим невязку баланса теплоты $\Delta$ по «физическому эксперименту» $Q_ф = q\tau_к$ и модели $Q_м = c_т R\times$ $\times(T_{ср,\,пл}(\tau_к) - T_н)$:

$$\Delta = 100\left(1 - q\frac{\tau_к}{c_т R\left(T_{ср,\,пл}(\tau_к) - T_н\right)}\right) =$$

$$= 100\cdot\left(1 - 5000\cdot\frac{105}{\dfrac{1{,}99}{7{,}869\cdot 10^{-7}}\cdot 0{,}04\cdot\left(1805{,}1 - 1800\right)}\right) =$$

$$= 1{,}7\ \%.$$

Следовательно, функция (1) довольно точно описывает распределение температур по сечению пластины в прогретом слое.

Среднеарифметические величины десяти значений $a_т$ и $\lambda_т$ были отнесены к среднемассовой температуре прогретого слоя $T_a = \dfrac{1800 + 1805{,}1}{2} = 1802{,}55$ за время 105 с и получились равными $a_т(T = 1802{,}55) = 7{,}869\cdot 10^{-7}$ и $\lambda = \lambda_т(T = 1802{,}55) = 1{,}99$. Отклонение $\delta$ от исходных значений $a_и(T = 1802{,}7) = 7{,}754\cdot 10^{-7}$ и $\lambda_и(T = 1802{,}7) =$ $= 1{,}985$ составило $\delta_{a,\,ср} = 1{,}48$ % и $\delta_{\lambda,\,ср} = 0{,}1$ %.

Анализ изменения $a_{т,\,i}$ и $\lambda_{т,\,i}$ в табл. 1 и результатов расчетов при других $T_н$ показал, значения $a_т$ и $\lambda_т$ на интервалах расчета изменяются незначительно (на 1 – 3 %). Проверим, можно ли рассчитать значения $a_{т,\,о}$ и $\lambda_{т,\,о}$ сразу для всего времени нагрева $0 \le \tau \le \tau_к$, не выполняя промежуточные расчеты по интервалам времени.

Величина $a_{т,\,о}$ определится решением системы из трех уравнений (2), (3), (4). Уравнения (2) – (4), преобразованные с учетом (1), для данных из табл. 1 ($R_п = 0{,}04$ м, $q = 5000$ Вт/м², $T_н = 1800$ К, $\tau_к = 105$ с, $T_0(\tau_к) = 1801{,}1$, $T_1(\tau_к) = 1825{,}6{,}1$) запишутся в виде:

$$n(\mathrm{Fo}) = 8{,}2052 - 82{,}74\mathrm{Fo};$$

$$a_{т,\,о} = \frac{T_0(\tau_к) + \dfrac{T_1(\tau_к) - T_0(\tau_к)}{n+1} - T_н}{n\left(T_1(\tau_к) - T_0(\tau_к)\right)\dfrac{\tau_к}{R^2}} =$$

$$= \frac{1800{,}1 + \dfrac{25{,}5}{n+1} - 1800}{n\cdot 25{,}5\cdot\dfrac{105}{0{,}04^2}};$$

$$\mathrm{Fo} = a_{т,\,о}\frac{105}{0{,}04^2}.$$

Подобрав значение числа Fo равным 0,0504, получим $n(\mathrm{Fo}) = 4{,}0245$ и $a_{т,\,о} = 7{,}68\cdot 10^{-7}$. Значение $a_{т,\,о}$ отличается от исходного $a_и(T = 1802{,}7) = 7{,}754\cdot 10^{-7}$ всего на 0,9 %.

Коэффициент теплопроводности $\lambda_{т,\,о}$ определится по формуле (7), которая для $\tau_к = 105$ с запишется в виде

$$\lambda_{т,\,о} = q\frac{R}{n\left(T_1(\tau_к) - T_0(\tau_к)\right)} =$$

$$= 5000\cdot\frac{0{,}04}{4{,}0245\cdot 25{,}5} = 1{,}945\ \text{Вт/(м}\cdot\text{К)}.$$

Значение $\lambda_{т,\,о}$ отличается от исходного на –1,8 %.

Аналогичные расчеты по определению $a_т$ выполнены по $\tau_к$ и таких же условий теплообмена, но с другими начальными условиями, $T_н = 300, 900, 1200$ К.

В табл. 2. приведены результаты расчета $a_т$, $a_{т,\,о}$, $\lambda_т$, $\lambda_{т,\,о}$ и их отклонение от истинных значений: $\delta_{a,\,ср}$ и $\delta_{\lambda,\,ср}$ (расчет десяти интервалов) и $\delta_{a,\,о}$ и $\delta_{\lambda,\,о}$ (расчет только по начальным и конечным параметрам поля).

Среднеарифметические абсолютные отклонения для четырех $T_a$ (см. табл. 2) для $a_т$ составили $\delta_{a,\,ср} = 2{,}2$ и $\delta_{a,\,о} = 1{,}7$ %, а для $\lambda_т$ – $\delta_{\lambda,\,ср} = 0{,}83$ и $\delta_{\lambda,\,о} = 1{,}25$ %. Таким образом, расчет $a_{т,\,о}$ и $\lambda_{т,\,о}$ с погрешностью около 2 % для принятых условий можно было выполнить реше-

Таблица 2

**Результаты расчета температуропроводности материала $a_т$ и коэффициента теплопроводности $\lambda_т$ по температурным полям, полученным при $q = 5000$ Вт/м² и начальных условиях $T_н = 300, 900, 1200, 1800$ К**

*Table 2.* **Results of calculating the thermal conductivity $a_t$ and thermal conductivity coefficient $\lambda_t$ from the temperature fields obtained at $q = 5000$ W/m² and the initial conditions $T_b = 300, 900, 1200, 1800$ K**

| $T_н(x)$, К ($0 \le x \le 0{,}04$ м) | 300 | 900 | 1200 | 1800 |
|---|---|---|---|---|
| Время, $\tau_к$, с | 150 | 123 | 120 | 105 |
| $T_1(\tau_к)$ | 352,7 | 936,9 | 1232,7 | 1825,6 |
| $T_0(\tau_к)$ | 300,1 | 900,1 | 1200,1 | 1800,1 |
| $T_{ср,\,пл}(\tau_к)$ | 310,8 | 907,5 | 1206,7 | 1805,1 |
| $T_a = \dfrac{T_н + T_{ср,\,пл}(\tau_к)}{2}$ | 305,40 | 903,80 | 1203,35 | 1802,55 |
| $a_и(T_a)\cdot 10^7$ | 5,384 | 6,526 | 7,000 | 7,754 |
| $a_т(T_a)\cdot 10^7$ | 5,527 | 6,724 | 6,889 | 7,869 |
| $\delta_{a,\,ср}$, % | 2,60 | 3,00 | –1,60 | 1,48 |
| $\delta_{a,\,о}$, % для $a_{т,\,о}$ | 1,0 | 1,3 | –3,6 | –0,9 |
| $\lambda_и(T_a)$ | 0,952 | 1,365 | 1,570 | 1,985 |
| $\lambda_т(T_a)$ | 0,963 | 1,380 | 1,550 | 1,990 |
| $\delta_{\lambda,\,ср}$, % | 1,1 | 0,9 | –1,2 | 0,1 |
| $\delta_{\lambda,\,о}$, % для $\lambda_{т,\,о}$ | 0,4 | –0,3 | –2,5 | –1,8 |

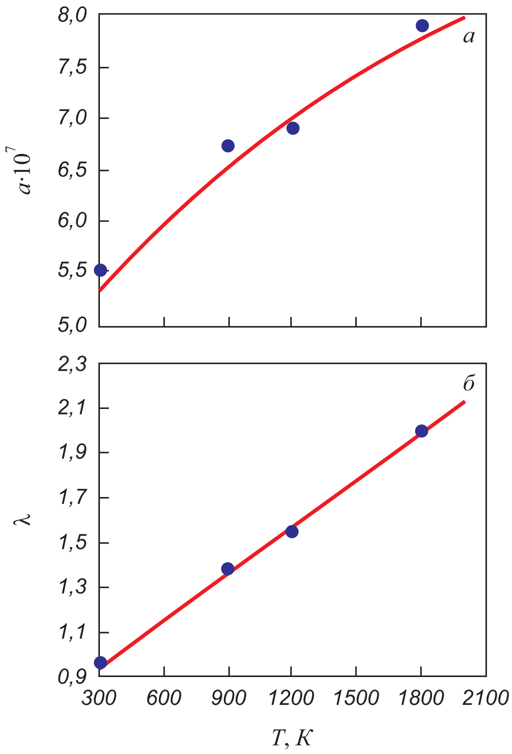


Рис. 2. Величины температуропроводности $a_т$ и коэффициента теплопроводности $\lambda_т$:
– истинные; ● – расчетные (восстановленные)

Fig. 2. Values of thermal diffusivity $a_t$ and thermal conductivity coefficient $\lambda_t$:
– true; ● – calculated (restored)

нием системы лишь трех алгебраических уравнений, записанных только для момента времени $\tau = \tau_к$. Обратим внимание, что время «экспериментального нагрева» $t_к$ составляло 105 – 150 с.

На рис. 2 приведены исходные (истинные) и расчетные значения температуропроводности и коэффициента теплопроводности.

Поскольку представленный метод является приближенным, при его практическом использовании рекомендуется отработать технику эксперимента (граничные условия) на материалах с известными ТФХ. Перепад температур $\Delta T = T(R_п, \tau_к) - T_н$, по оценке автора, должен находиться в пределе 20 – 60 К. Величину потока теплоты для эксперимента можно принять по формуле $q \approx 4\Delta T \dfrac{\lambda}{R_п}$, где λ – ожидаемое значение коэффициента теплопроводности.

## Выводы

Предложен простой алгоритм расчета температуропроводности $a_т$ и коэффициента теплопроводности $\lambda_т$ по известному температурному полю полуограниченного тела. Для оценки точности метода выполнены расчеты $a_т$ и $\lambda_т$ огнеупорного материала по предварительно рассчитанным (тестовым) температурным полям неограниченной пластины, полученным при граничных условиях второго рода $q = \text{const}$ и $T(x = 0, \tau) = T_н = \text{const}$. Показано, что для принятых условий теплообмена значения $a_т$ и $\lambda_т$ могут быть определены с погрешностью около 2 % только лишь по толщине пластины $R_п$, $q$, $T_н$ и температуре поверхности $T(R_п, \tau_к)$ в момент достижения температурного возмущения адиабатной поверхности $\tau_к$.

Применение метода позволит значительно упростить проведение и обработку экспериментов для комплексного определения теплофизических характеристик материалов.

## Список литературы

1. Определение теплофизических свойств материалов металлургического производства / Б.П. Юрьев, В.А. Гольцев, В.И. Матюхин, О.Ю. Шешуков. Екатеринбург: ООО «УИПЦ», 2014. 180 с.
2. Фокин В.М., Чернышев В.Н. Неразрушающий контроль теплофизических характеристик строительных материалов. М.: Издательство Машиностроние–1, 2004. 212 с.
3. Жуков Н.П., Майникова Н.Ф. Многомодельные методы и средства неразрушающего контроля теплофизических свойств материалов и изделий. М.: Издательство Машиностроние–1, 2004. 288 с.
4. Grysa Kr. Inverse heat conduction problems // Heat Conduction – Basic Research. Intech Open. URL: https://www.intechopen.com/chapters/24518
5. Savija I., Culham J.R., Yovanovich M.M., Marotta E.E. Review of thermal conductance models for joints incorporating enhancement materials // Journal of Thermophysics and Heat Transfer. 2003. Vol. 17. No. 1. P. 43–52. https://doi.org/10.2514/2.6732
6. Bouguerra A., Ait-Mokhtar A., Amiri O., Diop M.B. Measurement of thermal conductivity, thermal difusivity and heat capacity of highly porous building materials using transient plane source technique // International Communications in Heat and Mass Transfer. 2001. Vol. 28. No. 8. P. 1065–1078. https://doi.org/10.1016/S0735-1933(01)00310-4

## References

1. Yur'ev B.R., Gol'tsev V.A., Matyukhin V.I., Sheshukov O.Yu. *Determination of Thermophysical Properties of Metallurgical Production Materials: Sci. Monograph*. Yekaterinburg: UIPTs, 2014, 180 p. (In Russ.)
2. Fokin V.M., Chernyshov V.N. *Nondestructive Control of Thermophysical Characteristics of Building Materials*. Moscow: Mashinostroenie -1, 2004, 212 p. (In Russ.).
3. Zhukov N.P., Mainikova N.F. *Multi-Model Methods and Means of Nondestructive Control of Materials and Products Thermophysical Properties*. Moscow: Mashinostroenie –1, 2004, 288 p. (In Russ.).
4. Grysa Kr. Inverse heat conduction problems. In: *Heat Conduction – Basic Research. Intech Open*. Available at URL: https://www.intechopen.com/chapters/24518
5. Savija I., Culham J.R., Yovanovich M.M., Marotta E.E. Review of thermal conductance models for joints incorporating enhancement materials. *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*. 2003, vol. 17, no. 1, pp. 43–52. https://doi.org/10.2514/2.6732
6. Bouguerra A., Ait-Mokhtar A., Amiri O., Diop M.B. Measurement of thermal conductivity, thermal difusivity and heat capacity of highly porous building materials using transient plane source technique. *International Communications in Heat and Mass Transfer*. 2001, vol. 28, no. 8, pp. 1065–1078. https://doi.org/10.1016/S0735-1933(01)00310-4

**7.** Lin J.H., Chen C.K., Yang Y.T. Inverse method for estimating thermal conductivity in one-dimensional heat conduction problems // Journal of Thermophysics and Heat Transfer. 2001. Vol. 15. No. 1. P. 34–41. https://doi.org/10.2514/2.6593

**8.** Tervola P. A method to determine the thermal conductivity from measured temperature profiles // International Journal of Heat and Mass Transfer. 1989. Vol. 32. No. 8. P. 1425–1430. https://doi.org/10.1016/0017-9310(89)90066-5

**9.** Yang C.-Y. Estimation of the temperature-dependent thermal conductivity in inverse heat conduction problems // Applied Mathematical Modelling. 1999. Vol. 23. No. 6. P. 469–478. https://doi.org/10.1016/S0307-904X(98)10093-8

**10.** Liu C.S. One-step GPS for the estimation of temperature-dependent thermal conductivity // International Journal of Heat and Mass Transfer. 2006. Vol. 49. No. 17–18. P. 3084–3093. https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2005.11.036

**11.** Kim S., Kim M.C., Kim K.Y. Non-iterative estimation of temperature-dependent thermal conductivity without internal measurements // International Journal Heat and Mass Transfer. 2003. Vol. 46. No. 10. P. 1801–1810. https://doi.org/10.1016/S0017-9310(02)00486-6

**12.** Зверев В.Г., Назаренко В.А., Теплоухов А.В. Определение теплофизических характеристик материалов при тепловом воздействии постоянной мощности // Теплофизика и аэромеханика. 2011. Т. 18. № 3. С. 493–502.

**13.** Alhama E., Zueco J., González Fernández C.F. An efficient method for simultaneously determining thermal conductivity and specific heat solids in the form of an inverse problem // International Communications in Heat and Mass Transfer. 2004. Vol. 31. No. 7. P. 929–937. https://doi.org/10.1016/j.icheatmasstransfer.2004.05.003

**14.** Chen H.-T., Lin J.-Y. Simultaneous estimations of temperature-dependent thermal conductivity and heat capacity // International Journal of Heat and Mass Transfer. 1998. Vol. 41. No. 14. P. 2237–2244. https://doi.org/10.1016/S0017-9310(97)00260-3

**15.** Chia-Lung C., Ming C. Inverse determination of thermal conductivity using semi-discretization method // Applied Mathematical Modelling. 2009. Vol. 33. No. 3. P. 1644–1655. https://doi.org/10.1016/j.apm.2008.03.001

**16.** Weizhen Pan, Fajun Yi, Songhe Meng. Temperature-dependent thermal properties measurement by solvinginverse heat transfer problems // Measurement Science and Technology. 2016. Vol. 27. No. 7. Article 075005.

**17.** Rostamian M., Shahrezaee A. Application of meshless methods for solving an inverse heat conduction problem // European Journal of Pure and Applied Mathematics. 2016. Vol. 9. No. 1. P. 64–83.

**18.** Monde M., Kosaka M., Mitsutake Y. Simple measurement of thermal diffusivity and thermal conductivity using inverse solution for one-dimensional heat conduction // International Journal of Heat and Mass Transfer. 2010. Vol. 53. No. 23–24. P. 5343–5349. https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2010.07.022

**19.** Kosaka M., Monde M. Simultaneous measurement of thermal diffusivity and thermal conductivity by means of inverse solution for one-dimensional heat conduction (anisotropic thermal properties of CFRP for FCEV) // International Journal of Thermophysics. 2015. Vol. 36. No. 10–11. P. 2590–2598. https://doi.org/10.1007/s10765-015-1973-5

**20.** Huang C.H., Yan J.Y. An inverse problem in simultaneously measuring temperature-dependent thermal conductivity and heat capacity // International Journal of Heat and Mass Transfer. 1995. Vol. 38. No. 18. P. 3433–3441. https://doi.org/10.1016/0017-9310(95)00059-I

**21.** Bosnic J.A., Petrovic G., Malaric R. Estimation of the wall thermal properties through comparison of experimental and simulated heat flux // 21st IMEKO TC4 Int. Symp. and 19th Int. Workshop on ADC Modelling and Testing Understanding the World through Electrical and Electronic Measurement, Budapest, Hungary, September 7–9, 2016. P. 11–15.

**22.** Nedin R., Nesterov S., Vatulyan A. Identification of thermal conductivity coefficient and volumetric heat capacity of functionally graded

**7.** Lin J.H., Chen C.K., Yang Y.T. Inverse method for estimating thermal conductivity in one-dimensional heat conduction problems. *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*. 2001, vol. 15, no. 1, pp. 34–41. https://doi.org/10.2514/2.6593

**8.** Tervola P. A method to determine the thermal conductivity from measured temperature profiles. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 1989, vol. 32, no. 8, pp. 1425–1430. https://doi.org/10.1016/0017-9310(89)90066-5

**9.** Yang C.-Y. Estimation of the temperature-dependent thermal conductivity in inverse heat conduction problems. *Applied Mathematical Modelling*. 1999, vol. 23, no. 6, pp. 469–178. https://doi.org/10.1016/S0307-904X(98)10093-8

**10.** Liu C.S. One-step GPS for the estimation of temperature-dependent thermal conductivity. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 2006, vol. 49, no. 18, pp. 3084–3093. https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2005.11.036

**11.** Kim S., Kim M.C., Kim K.Y. Non-iterative estimation of temperature-dependent thermal conductivity without internal measurements. *International Journal Heat and Mass Transfer*. 2003, vol. 46, no. 10, pp. 1801–1810. https://doi.org/10.1016/S0017-9310(02)00486-6

**12.** Zverev V.G., Nazarenko V.A., Teploukhov A.V. Determination of thermophysical characteristics of materials at thermal effect of constant power. *Thermophysics and Aeromechanics*. 2011, vol. 18, no. 3, pp. 477–486. https://doi.org/10.1134/S0869864311030127

**13.** Alhama F., Zueco J., González Fernández C.F. An efficient method for simultaneously determining thermal conductivity and specific heat solids in the form of an inverse problem. *International Communications in Heat and Mass Transfer*. 2004, vol. 31, no. 7, pp. 929–937. https://doi.org/10.1016/j.icheatmasstransfer.2004.05.003

**14.** Chen H.-T., Lin J.-Y. Simultaneous estimations of temperature-dependent thermal conductivity and heat capacity. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 1998, vol. 41, no. 14, pp. 2237–2244. https://doi.org/10.1016/S0017-9310(97)00260-3

**15.** Chia-Lung C., Ming C. Inverse determination of thermal conductivity using semi-discretization method. *Applied Mathematical Modelling*. 2009, vol. 33, no. 3, pp. 1644–1655. https://doi.org/10.1016/j.apm.2008.03.001

**16.** Weizhen Pan, Fajun Yi, Songhe Meng. Temperature-dependent thermal properties measurement by solving inverse heat transfer problems. *Measurement Science and Technology*. 2016, vol. 27, no. 7, article 075005.

**17.** Rostamian M., Shahrezaee A. Application of meshless methods for solving an inverse heat conduction problem. *European Journal of Pure and Applied Mathematics*. 2016, vol. 9, no. 1, pp. 64–83.

**18.** Monde M., Kosaka M., Mitsutake Y. Simple measurement of thermal diffusivity and thermal conductivity using inverse solution for one-dimensional heat conduction. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 2010, vol. 53, no. 23–24, pp. 5343–5349. https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2010.07.022

**19.** Kosaka M., Monde M. Simultaneous measurement of thermal diffusivity and thermal conductivity by means of inverse solution for one-dimensional heat conduction (anisotropic thermal properties of CFRP for FCEV). *International Journal of Thermophysics*. 2015, vol. 36, no. 10–11, pp. 2590–2598. https://doi.org/10.1007/s10765-015-1973-5

**20.** Huang C.H., Yan J.Y. An inverse problem in simultaneously measuring temperature-dependent thermal conductivity and heat capacity. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 1995, vol. 38, pp. 3433–3441. https://doi.org/10.1016/0017-9310(95)00059-I

**21.** Bosnic J.A., Petrovic G., Malaric R. Estimation of the wall thermal properties through comparison of experimental and simulated heat flux. *21st IMEKO TC4 Int. Symp. and 19th Int.Workshop on ADC Modelling and Testing Understanding the World through Electrical and Electronic Measurement, Budapest, Hungary, September 7–9, 2016*, pp. 11–15.

**22.** Nedin R., Nesterov S., Vatulyan A. Identification of thermal conductivity coefficient and volumetric heat capacity of functionally graded

materials // International Journal of Heat and Mass Transfer. 2016. Vol. 102. P. 213–218.
https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2016.06.027

23. Kolehmainen V., Kaipio J.P., Orlande H.R.B. Reconstruction of thermal conductivity and heat capacity using a tomographic approach // International Journal of Heat and Mass Transfer. 2008. Vol. 51. No. 7–8. P. 1866–1876.
https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2007.06.043
24. Alaili K., Ordonez-Miranda J., Ezzahri Y. Simultaneous determination of thermal diffusivity and thermal conductivity of a thin layer using double modulated thermal excitations // Journal of Applied Physics. 2019. Vol. 126. No. 14. Article 145103.
https://doi.org/10.1063/1.5116526
25. Huang C.-H., Huang C.-Y. An inverse problem in estimating simultaneously the effective thermal conductivity and volumetric heat capacity of biological tissue // Applied Mathematical Modelling. 2007. Vol. 31. No. 9. P. 1785–1797.
https://doi.org/10.1016/j.apm.2006.06.002
26. Соколов А.К. Определение температуропроводности материала по численно-аналитической модели полуограниченного тела // Известия вузов. Черная металлургия. 2020. Т. 63. № 6. С. 474–480. https://doi.org/10.17073/0368-0797-2020-6-474-480
27. Соколов А.К., Якубина О.А. Численно-аналитический метод расчета температурного поля полуограниченного тела с использованием показательных функций // Вестник ИГЭУ. 2016. Вып. 2. С. 44–50.
28. Соколов А.К. О численно-аналитическом расчете температурного поля полуограниченного тела при линейном начальном распределении температур // Известия РАН. Энергетика. 2019. № 4. С. 1–13.
29. Соколов А.К. Математическое моделирование нагрева металла в газовых печах. Иваново: Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина, 2011. 396 с.
30. ГОСТ Р 57967-2017. Композиты. Определение теплопроводности твердых тел методом стационарного одномерного теплового потока с охранным нагревателем. URL: https://docs.cntd.ru/document/1200157746

materials. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 2016, vol. 102, no. 11, pp. 213–218.
https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2016.06.027

23. Kolehmainen V., Kaipio J.P., Orlande H.R.B. Reconstruction of thermal conductivity and heat capacity using a tomographic approach. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 2008, vol. 51, no. 7–8, pp. 1866–1876.
https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2007.06.043
24. Alaili K., Ordonez-Miranda J., Ezzahri Y. Simultaneous determination of thermal diffusivity and thermal conductivity of a thin layer using double modulated thermal excitations. *Journal of Applied Physics*. 2019, vol. 126, no. 14, article 145103.
https://doi.org/10.1063/1.5116526
25. Huang C.-H., Huang C.-Y. An inverse problem in estimating simultaneously the effective thermal conductivity and volumetric heat capacity of biological tissue. *Applied Mathematical Modelling*. 2007, vol. 31, no. 9, pp. 1785–1797.
https://doi.org/10.1016/j.apm.2006.06.002
26. Sokolov A.K. Determination of thermal diffusivity of the material by numerical-analytical model of a semi-bounded body. *Izvestiya. Ferrous Metallurgy*. 2020, vol. 63, no. 6, pp. 474–480.
https://doi.org/10.17073/0368-0797-2020-6-474-480
27. Sokolov A.K., Yakubina O.A. Numerical-analytical method for calculating the temperature field of a semi-bounded body using exponential functions. *Vestnik IGEU*. 2016, no. 2, pp. 44–50. (In Russ.).
28. Sokolov A.K. On numerical and analytical calculation of temperature field of a semi-bounded body with linear initial temperature distribution. *Izvestiya RAN. Energetika*. 2019, no. 4, pp. 1–13. (In Russ.).
29. Sokolov A.K. *Mathematical Modeling of Metal Heating in Gas Furnaces*. Ivanovo: Ivanovo State Power University, 2011, 396 p. (In Russ.).
30. *GOST R 57967-2017. Composites. Determination of the thermal conductivity of solids by the method of stationary one-dimensional heat flow with a security heater*. Available at URL: https://docs.cntd.ru/document/1200157746 (In Russ.).

## Сведения об авторе

***Анатолий Константинович Соколов****, д.т.н., профессор кафедры безопасности жизнедеятельности,* Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина
***ORCID:*** 0000-0001-5956-567X
***E-mail:*** sokolov@bjd.ispu.ru

## Information about the author

***Anatolii K. Sokolov****, Dr. Sci. (Eng.), Professor of the Chair of Life Safety,* Ivanovo State Power University named after V.I. Lenin
***ORCID:*** 0000-0001-5956-567X
***E-mail:*** sokolov@bjd.ispu.ru

Поступила в редакцию 08.09.2021
После доработки 08.10.2021
Принята к публикации 29.10.2021

Received 08.09.2021
Revised 08.10.2021
Accepted 29.10.2021