



Оригинальная статья

УДК 536.212:621.785

DOI 10.17073/0368-0797-2021-11-815-824



МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕРМИЧЕСКИХ НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ УПРОЧНЕНИИ ПОВЕРХНОСТИ ИЗДЕЛИЯ ТЕПЛОВЫМ ИМПУЛЬСОМ

М. В. Темлянцева¹, О. Л. Базайкина², Е. Н. Темлянцева¹,
В. Я. Целлермаер¹

¹ Сибирский государственный индустриальный университет (Россия, 654007, Кемеровская обл. – Кузбасс, Новокузнецк, ул. Кирова, 42)

² Владимирский юридический институт ФСИН России (Россия, 600020, Владимир, ул. Большая Нижегородская, 67Е)

Аннотация. Статья содержит частное решение линейного варианта задачи динамической термоупругости в приложении к моделированию условий поверхностного упрочнения металлических изделий энергетическим импульсом. Уравнение движения среды рассматривается совместно с моделью температурного импульса, опробованной ранее на совместимость с частными случаями уравнений параболической и гиперболической теплопроводности. Представлена задача о нагружении плоской грани короткого кругового цилиндра (диска) температурным импульсом. Импульс является следствием принятой структуры объемной плотности мощности теплового потока, временной множитель которой имеет форму одной волны функции Хевисайда. Для построения тензора термических напряжений авторы использовали классический термоупругий потенциал перемещений и метод его разделения на произведение функций независимых переменных. Получены дифференциальные уравнения для функций-множителей, найдены их общие решения. Для компонент тензора термических напряжений поставлены естественные граничные условия. Полученные решения имеют форму отрезков функциональных рядов (функции Бесселя по радиальной координате и экспоненциальной функции по осевой координате). Рассмотрен численный пример нагружения диска из стали марки 40ХН, механические свойства которой чувствительны к температурной обработке. При расчетах авторы использовали пакет компьютерной математики Maple. Приближенные решения учитывают первые 24 члена функциональных рядов. Расчеты примера позволяют объяснить наличие пиков напряжений и интенсивности напряжений как следствие взаимно обратных процессов роста температурных напряжений и уменьшения коэффициентов упругости с ростом температуры. Численный пример предостерегает от опоры только на оценки решений задач термоупругости без учета пластических и вязких свойств материала.

Ключевые слова: круглый цилиндр, поверхностное упрочнение, термические напряжения, термоупругий потенциал перемещений, температурный импульс, граничные условия, сталь марки 40ХН, закалка, отпуск

Благодарность: Авторы работы выражают признательность д.т.н. В.И. Базайкину за участие в обсуждении представляемых результатов.

Для цитирования: Темлянцева М.В., Базайкина О.Л., Темлянцева Е.Н., Целлермаер В.Я. Моделирование термических напряжений при упрочнении поверхности изделия тепловым импульсом // Известия вузов. Черная металлургия. 2021. Т. 64. № 11. С. 815–824.
<https://doi.org/10.17073/0368-0797-2021-11-815-824>

Original article

MODELING OF THERMAL STRESSES DURING HARDENING THE PRODUCT SURFACE BY THERMAL PULSE

M. V. Temlyantsev¹, O. L. Bazaikina², E. N. Temlyantseva¹,
V. Ya. Tsellermaer¹

¹ Siberian State Industrial University (42 Kirova Str., Novokuznetsk, Kemerovo Region – Kuzbass 654007, Russian Federation)

² Vladimir Law Institute of the FPS of Russia (67E Bolshaya Nizhegorodskaya Str., Vladimir 600020, Russian Federation)

Abstract. A particular solution of a linear variant of the dynamic thermal elasticity problem is considered in application to modeling the conditions of surface hardening of metal products by an energy pulse. The authors determined the equation of medium motion with the model of temperature pulse tested earlier for compatibility with special cases of the equations of parabolic and hyperbolic thermal conductivity. The problem of loading a flat plane of a short circular cylinder (disk) with a temperature pulse is presented. Pulse is a consequence of adopted structure of the volumetric power density of the heat flux, the time multiplier of which has the form of a single wave of the Heaviside function. Classical thermoelastic displacement potential and the method of its division into the product of independent variables functions were used to construct the thermal stress tensor. Differential equations for multiplier functions and their general solutions were found. Natural boundary conditions were set for the components of thermal stress

tensor, and their tasks were solved. The obtained solutions are in the form of segments of functional series (the Bessel function in radial coordinate and the exponential function in axial coordinate). The article considers a numerical example of loading a disk made of 40KhN steel which has the mechanical properties sensitive to temperature treatment. Maple computer mathematics package was used in the calculations. Approximate solutions take into account the first 24 terms of the functional series. Estimation of the example makes it possible to explain the presence of stress peaks and stress intensity as a consequence of mutually inverse processes of temperature stress growth and reduction of elasticity coefficients with temperature rise. The numerical example warns against relying only on estimates of solutions to thermoelasticity problems without taking into account the plastic and viscous properties of the material.

Keywords: round cylinder, surface hardening, thermal stresses, thermoelastic displacement potential, temperature pulse, boundary conditions, 40KhN steel, quenching, tempering

Acknowledgements: The authors express their gratitude to V.I. Bazaykin, Dr. Sci. (Eng.) for participating in a useful discussion of the presented results.

For citation: Temlyantsev M.V., Bazaikina O.L., Temlyantseva E.N., Tsellermaer V.Ya. Modeling of thermal stresses during hardening the product surface by thermal pulse. *Izvestiya. Ferrous Metallurgy*. 2021, vol. 64, no. 11, pp. 815–824. (In Russ.).

<https://doi.org/10.17073/0368-0797-2021-11-815-824>

ВВЕДЕНИЕ

Одной из ресурсосберегающих технологий обработки металлов является метод поверхностного упрочнения металлического изделия. Широко используются методы электровзрывной [1], плазменной [2, 3] и лазерной [4, 5] обработок поверхностей изделий энергетическими импульсами. Как правило, основной интерес исследователей сосредоточен на динамике температурного поля, ее влиянии на фазовый состав упрочняемого слоя и механизмы упрочнения поверхностного слоя.

Переменное температурное поле в импульсе неизбежно порождает в поверхностном слое значительные термические напряжения, разрушающие структуру поверхностного слоя. Оценка упругих термических напряжений зависит от постановки и формы решения обобщенной задачи для уравнений термоупругости, которая ставится для системы двух уравнений (движения элементов среды и распространения в ней тепла).

Классическое параболическое уравнение теплопроводности приводит к адекватным решениям для большинства тех инженерных задач, в которых время термического воздействия не меньше одной микросекунды. Однако эффекты действия ионных, плазменных, электромагнитных излучений с меньшей длительностью не описываются в рамках этой модели, так как элементы среды не успевают релаксировать действие этих излучений. Пример учета времени релаксации при изучении изменений в материалах при лазерном воздействии представлен в работе [6].

В работе [7] приведен обобщенный закон Фурье, который отличается от классического введением параметра τ_q (время релаксации средой градиента температурного поля), имеющего смысл времени запаздывания формирования вектора плотности потока тепла относительно отрицательного вектора градиента температуры. В результате уравнение теплопроводности становится гиперболическим, а среда приобретает новую характеристику (конечную скорость распространения тепловой волны) [8]. Как следует из теоретической оценки в работе [9], $\tau_q < 1$ мкс.

В работе [10] разработана модель уравнения теплопроводности с двумя параметрами запаздывания (τ_q и τ_T , где τ_T – время запаздывания формирования градиента температуры). Оценки величин τ_q и τ_T следующие: $0 < \tau_q < \tau_T$, для металлов $\tau_T \approx (1 \div 10)\tau_q$. Особенности действий параметров τ_q и τ_T проявляются при обработке поверхностей металлов короткими лазерными импульсами (наносекундной длительности) [11].

Новые подходы к моделированию [12, 13] включают описание оптических свойств материалов, быстро меняющихся в процессе облучения, нелинейного распространения ультракоротких импульсов излучения в поглощающих средах, передачи энергии от электронной к атомарной подсистеме, формирования и распространения волн напряжений и деформаций в материале под их влиянием.

Электровзрывное или плазменное воздействия на поверхность до температуры оплавления поверхностного слоя длится не менее десятка микросекунд, что вполне описывается теплопереносом согласно параболическому уравнению теплопроводности. Ранее в работе [14] на численном примере показана зависимость динамики температурного поля от структуры уравнения теплопроводности.

В настоящей работе термические напряжения, инициируемые тепловым эквивалентом энергетического импульса, оцениваются решением задачи для уравнения движения термоупругой среды цилиндра конечной длины. Уравнение содержит градиент температуры теплового импульса. Использована одна из моделей теплового импульса, полученная ранее [15, 16].

УРАВНЕНИЯ ЗАДАЧИ

Рассматривается уравнение движения термоупругой изотропной среды [17]:

$$\mu \Delta u + (\lambda + \mu) \text{grad}(\text{div} u) - \gamma \text{grad} T = \chi \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (1)$$

где $u(x, t) = x^t - x$ – вектор смещения материальной точки x , занимающей в начальный момент времени t_0 поло-

жение $x = x(t_0)$, в положение $x^t = x(t)$, занимаемое точкой в момент времени $t > t_0$; $T = T(x, t)$ – температура материальной точки x среды в момент $t \geq t_0$; $\gamma = (2\mu + 3\lambda)\beta$; λ и μ – постоянные Ламе; β – коэффициент линейного теплового расширения; $\chi = \chi(x, t)$ – плотность материала в малой окрестности точки x среды в момент $t \geq t_0$.

В случае осевой симметрии компоненты тензора упругих линейных деформаций выражаются через координаты $u_r \equiv u$ и $u_z \equiv w$ вектора смещения u : $e_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r}$;

$$e_{\phi\phi} = \frac{u}{r}; e_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}; e_{rz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right), \text{ объемное расширение } e = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z}. \text{ Векторное уравнение движения (1)}$$

эквивалентно системе скалярных уравнений движения для двух ненулевых компонент вектора перемещения:

$$\begin{cases} \Delta u - \frac{u}{r^2} + \frac{\lambda + \mu}{\mu} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) - \\ - \frac{3\lambda + 2\mu}{\mu} \beta \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\chi}{\mu} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \\ \Delta w + \frac{\lambda + \mu}{\mu} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) - \\ - \frac{3\lambda + 2\mu}{\mu} \beta \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\chi}{\mu} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \end{cases} \quad (2)$$

Обозначим $F(r, \phi, z)$ термоупругий потенциал перемещений. Тогда перемещения и деформации представляются [18] в виде

$$u = \frac{\partial F}{\partial r}; w = \frac{\partial F}{\partial z}; e = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = \Delta F,$$

а система (2) переписывается следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial r} \Delta F + \frac{\lambda + \mu}{\mu} \frac{\partial}{\partial r} \Delta F - \frac{3\lambda + 2\mu}{\mu} \beta \frac{\partial T}{\partial r} = \\ = \frac{\rho}{\mu} \frac{\partial}{\partial t^2} \left(\frac{\partial F}{\partial r} \right) = \frac{\chi}{\mu} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial F}{\partial t^2} \right); \\ \frac{\partial}{\partial z} \Delta F + \frac{\lambda + \mu}{\mu} \frac{\partial}{\partial z} \Delta F - \frac{3\lambda + 2\mu}{\mu} \beta \frac{\partial T}{\partial z} = \\ = \frac{\rho}{\mu} \frac{\partial}{\partial t^2} \left(\frac{\partial F}{\partial z} \right) = \frac{\chi}{\mu} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial F}{\partial t^2} \right). \end{cases}$$

Интегрируя первое уравнение по переменной r , а второе – по переменной z , приходим к одному и тому же неоднородному дифференциальному уравнению (в частных производных) второго порядка для функции $F(r, \phi, z)$:

$$\Delta F(r, z, t) - \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu} \beta T(r, z, t) = \frac{\chi}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial^2 F(r, z, t)}{\partial t^2}. \quad (3)$$

Применим к потенциалу $F(r, z, t)$ процедуру разделения переменных $F(r, z, t) = U_r(r) U_z(z) W(t)$.

Зададим тепловой импульс $T(r, z, t)$, независимый от координаты r , со структурой $T = T_0 W(t) U_z(z)$ (здесь $W(t)$ – развертка во времени температурного импульса единичной высоты, имеющая форму равнобедренного треугольника с длиной основания c вдоль оси времени t [16]):

$$W(t) = \frac{2t}{c} - \frac{2}{c} (2t - c) H\left(t - \frac{c}{2}\right) + \frac{2(t - c)}{c} H(t - c),$$

где $H(t)$ – функция Хевисайда; T_0 – максимум температуры в симметричном треугольном импульсе температурного нагружения, достигаемый в момент времени $\tau = \frac{c}{2}$ с; функция $W(t)$ кусочно-линейная в промежутке

$\left(0, \frac{c}{2}\right) \cup \left(\frac{c}{2}, c\right)$ времени c действия импульса, в этом промежутке $\frac{d^2 W}{dt^2} = 0$.

С учетом принятых структур функций $F(r, z, t)$ и $T(r, z, t)$ уравнение (3) распадается на два независимых по аргументам дифференциальных уравнения, связанные общей пока неопределенной постоянной v :

$$\begin{cases} U_r'' + \frac{1}{r} U_r' + v U_r = -\frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu} \beta T_0; \\ U_z'' - v U_z = 0. \end{cases} \quad (4)$$

В выражениях (4) значения λ, μ, β не зависят от переменных r и z , поэтому при каждом значении температуры t их можно рассматривать как постоянные величины. Для системы уравнений (4) параметр $k = \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu} \beta T_0$ является безразмерным.

Решением первого уравнения системы (4) является функция

$$U_r(r) = C_1 J\left(0, \sqrt{v}r\right) + C_2 Y\left(0, \sqrt{v}r\right) - \frac{k}{v},$$

решением второго уравнения служит функция

$$U_z(z) = Q_1 e^{\sqrt{v}z} + Q_2 e^{-\sqrt{v}z},$$

где C_1, C_2, Q_1, Q_2 – произвольные постоянные; $J\left(0, \sqrt{v}r\right)$ – функция Бесселя первого рода нулевого порядка; $Y\left(0, \sqrt{v}z\right)$ – функция Бесселя второго рода [19] нулевого порядка; v – параметр функций).

Простейший вариант термического потенциала перемещения может быть представлен в виде

$$F(r, z, t) = U_r(r)U_z(z)W(t) = \left[C_1 J\left(0, \sqrt{v}r\right) - \frac{k}{v} \right] Q_2 e^{-\sqrt{v}z} \times \left[\frac{2t}{c} - \frac{2}{c} (2t - c) H\left(t - \frac{2}{c}\right) + \frac{2(t - c)}{c} H(t - c) \right].$$

ДЕФОРМАЦИИ И НАПРЯЖЕНИЯ ОБЩЕГО ВИДА

Найденные через потенциал перемещений компоненты тензора линейных деформаций общего вида имеют следующие выражения:

$$e_{rr} = \frac{\partial^2 U_r}{\partial r^2} U_z W = C v \left[\frac{J(1, \sqrt{v}r)}{\sqrt{v}r} - J(0, \sqrt{v}r) \right] e^{-\sqrt{v}z} W;$$

$$e_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial U_r}{\partial r} U_z W = -C \sqrt{v} \frac{J(1, \sqrt{v}r)}{r} e^{-\sqrt{v}z} W;$$

$$e_{zz} = U_r \frac{\partial^2 U_z}{\partial z^2} W = \left(C v J(0, \sqrt{v}r) e^{-\sqrt{v}z} - Q_2 k e^{-\sqrt{v}z} \right) W;$$

$$e_{rz} = \frac{\partial U_r}{\partial r} \frac{\partial U_z}{\partial z} W = C v J(1, \sqrt{v}r) e^{-\sqrt{v}z} W;$$

$$e = \left[\left(\frac{\partial^2 U_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_r}{\partial r} \right) U_z + U_r \frac{\partial^2 U_z}{\partial z^2} \right] W = -Q_2 k e^{-\sqrt{v}z} W,$$

где $C = C_1 Q_2$.

Уравнения связи [16] между упругими напряжениями и деформациями в цилиндрических координатах в случае осевой симметрии имеют вид:

$$\sigma_{rr} = 2G \left(e_{rr} + \frac{\sigma}{1 - 2\sigma} e \right);$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = 2G \left(e_{\varphi\varphi} + \frac{\sigma}{1 - 2\sigma} e \right);$$

$$\sigma_{zz} = 2G \left(e_{zz} + \frac{\sigma}{1 - 2\sigma} e \right);$$

$$\sigma_{rz} = 2G e_{rz},$$

где G – модуль сдвига; σ – коэффициент Пуассона материала цилиндра.

Введем обозначение $\frac{\sigma}{1 - 2\sigma} = \eta$, выражения компонент тензора напряжений примут вид:

$$\sigma_{rr} = 2G(e_{rr} + \eta e);$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = 2G(e_{\varphi\varphi} + \eta e);$$

$$\sigma_{zz} = 2G(e_{zz} + \eta e);$$

$$\sigma_{rz} = 2G e_{rz}.$$

Получили напряжения, выраженные через две произвольные постоянные C , Q_2 , и пока неопределенный параметр v функций Бесселя:

$$\sigma_{rr} = 2G \left[C v \left(\frac{J(1, \sqrt{v}r)}{\sqrt{v}r} - J(0, \sqrt{v}r) \right) - Q_2 k \eta \right] e^{-\sqrt{v}z} W(t);$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = -2G \left[C \sqrt{v} \frac{J(1, \sqrt{v}r)}{r} + Q_2 k \eta \right] e^{-\sqrt{v}z} W(t);$$

$$\sigma_{zz} = 2G \left(C v J(0, \sqrt{v}r) - (\eta + 1) Q_2 k \right) e^{-\sqrt{v}z} W(t);$$

$$\sigma_{rz} = 2G C v J(1, \sqrt{v}r) e^{-\sqrt{v}z} W(t).$$

ВЫБОР ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ ДЛЯ НАПРЯЖЕНИЙ ОБЩЕГО ВИДА

Граничное условие для напряжений σ_{rr} . При $r = R$ и любых $t \geq 0$, $z \geq 0$ для всех значений v_i справедливо $\sigma_{rr} = 0$. Получаем семейства коэффициентов $c_i = C(v_i)$, $d q_i = Q_2(v_i)$, привязанных к значениям v_i параметра v (где d – некоторая постоянная, подлежащая определению). Обозначая $p_i = c_i v_i$, приходим к возможности подбора таких значений коэффициентов p_i , q_i и d , при которых удовлетворяется граничное условие

$$\sigma_{rr} = 2G \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \left[p_i \left(\frac{J(1, \sqrt{v_i}r)}{\sqrt{v_i}r} - J(0, \sqrt{v_i}r) \right) e^{-\sqrt{v_i}z} \right] - d k \eta \sum_{i=1}^{\infty} q_i e^{-\sqrt{v_i}z} \right\} W(t).$$

Пусть $\frac{\sigma_{rr}}{2G} = \bar{\sigma}_{rr}$ – доля напряжения σ_{rr} в значении $2G$ в сечении $z = 0$ цилиндра в момент $t = c/2$ и q_i – члены числовой последовательности

$$\left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots, \left(\frac{1}{2} \right)^i, \dots \right\},$$

для которых $\sum_{i=1}^{\infty} q_i = 1$. Тогда выражение $\bar{\sigma}_{rr}$ в сечении $z = 0$ в момент $t = c/2$ примет вид

$$\bar{\sigma}_{rr} = \sum_{i=1}^{\infty} \left[p_i \left(\frac{J(1, \sqrt{v_i}r)}{\sqrt{v_i}r} - J(0, \sqrt{v_i}r) \right) \right] - d \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu} T_0 \beta(T_0) \eta.$$

Помня, что максимальное значение относительного напряжения $\bar{\sigma}_{rr} = 1$, получаем разложение постоянной

величины $1 + d \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu} T_0 \beta(T_0) \eta$ в ряд Дини-Бесселя по базису $\left\{ J\left(1, \sqrt{v_i} r\right) \frac{1}{\sqrt{v_i} r} - J\left(0, \sqrt{v_i} r\right) \right\}_{i=1}^{\infty}$ функций Бесселя [19]:

$$1 + d \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu} T_0 \beta(T_0) \eta = \sum_{i=1}^{\infty} p_i \left(\frac{J\left(1, \sqrt{v_i} r\right)}{\sqrt{v_i} r} - J\left(0, \sqrt{v_i} r\right) \right). \quad (5)$$

Требования к напряжениям σ_{rr} – нулевые значения на поверхности $r = R$ цилиндра. Это возможно при выполнении равенства $J(1, \xi) = J(0, \xi) \xi$ (где $\xi = \sqrt{v} R$). Имеется счетное множество положительных корней $\xi_i = \sqrt{v_i} R$ этого равенства. Коэффициенты p_i ряда Дини-Бесселя находятся по формуле:

$$p_i = \frac{2 \left(1 + d \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu} T_0 \beta(T_0) \eta \right)}{R^2 \left[J^2(0, \xi_i) + J^2(1, \xi_i) \right]} \times \int_0^R \left[J\left(1, \sqrt{v_i} r\right) \frac{1}{\sqrt{v_i} r} - r J\left(0, \sqrt{v_i} r\right) \right] dr.$$

Погрешность приближенного представления напряжения σ_{rr} зависит от длины n отрезка ряда Дини-Бесселя:

$$\sigma_{rr} = 2G(T) \left\{ \sum_{i=1}^n p_i \left(\frac{J\left(1, \sqrt{v_i} r\right)}{\sqrt{v_i} r} - J\left(0, \sqrt{v_i} r\right) \right) e^{-\sqrt{v_i} z} - d \eta k q_i e^{-\sqrt{v_i} z} \right\} \left(\frac{2t}{c} - \frac{2}{c} (2t - c) H\left(t - \frac{c}{2}\right) + \frac{2(t - c)}{c} H(t - c) \right),$$

$$k = \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu} T(t) \beta(T).$$

Требование для окружных напряжений $\sigma_{\varphi\varphi}$ – их равенство радиальным напряжениям σ_{rr} на оси цилиндра ($r = 0$). Сравним напряжения $\sigma_{\varphi\varphi}(v)$ с напряжениями $\sigma_{rr}(v)$ при каждом значении v при $r \rightarrow 0$. Так как

$$\lim_{\sqrt{vr} \rightarrow 0} \left(\frac{J\left(1, \sqrt{vr}\right)}{\sqrt{vr}} \right) = \frac{1}{2},$$

$$\lim_{\sqrt{vr} \rightarrow 0} \left(J\left(1, \sqrt{vr}\right) \frac{1}{\sqrt{vr}} - J\left(0, \sqrt{vr}\right) \right) = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2},$$

то исходное условие равенства выполняется:

$$\sigma(v)_{rr}|_{r=0} = \sigma(v)_{\varphi\varphi}|_{r=0} = \left(-\frac{1}{2} - Q k \eta \right) e^{-\sqrt{v} z} W(t).$$

Введя такую же долю напряжения $\sigma_{\varphi\varphi}$ в $2G$ в сечении $z = 0$ цилиндра в момент $t = c$ и те же коэффициенты q_i, d , что и выше, получим напряжение $\bar{\sigma}_{\varphi\varphi}$ в сечении $z = 0$ цилиндра в момент $t = c$:

$$\bar{\sigma}_{\varphi\varphi} = - \left[\left(\sum_{i=1}^{\infty} p_i \frac{J\left(1, \sqrt{v_i} r\right)}{\sqrt{v_i} r} \right) + d \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu} T_0 \beta(T_0) \eta \right].$$

Так как максимальное значение модуля напряжений $\bar{\sigma}_{rr} = 1$, то запись

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i \left(\frac{J\left(1, \sqrt{v_i} r\right)}{\sqrt{v_i} r} \right) = - \left(1 + d \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu} T_0 \beta(T_0) \eta \right)$$

является разложением равенства постоянной

$$\left[- \left(1 + d \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu} T_0 \beta(T_0) \eta \right) \right]$$

в ряд Фурье-Бесселя разложения по ортогональному базису

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{v_i} r} J\left(1, \sqrt{v_i} r\right) \right\}_{i=1}^{\infty},$$

составленному из функций Бесселя. Значения v_i параметра v находятся по корням уравнений $J(1, \xi) = 0,2$ и $J(1, \xi) = 0,1$ (где $\xi = \sqrt{v} R$). Коэффициенты p_i находятся по следующей формуле:

$$p_i = \frac{-2 \left(1 + d \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu} T_0 \beta(T_0) \eta \right)}{R \xi_i J^2(2, \xi_i)} \int_0^R J\left(1, \sqrt{v_i} r\right) dr.$$

В результате получаем выражение окружных напряжений

$$\sigma_{\varphi\varphi} = -2G(T) \left[\sum_{i=1}^{\infty} p_i \left(\frac{J\left(1, \sqrt{v_i} r\right)}{\sqrt{v_i} r} \right) e^{-\sqrt{v_i} z} + d \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu} T(t) \beta(T) \eta \sum_{i=1}^{\infty} q_i e^{-\sqrt{v_i} z} \right] W(t).$$

Выбор граничных условий для напряжений σ_{zz} . Для каждого значения v_i выражение $\sigma_{zz}(v_i)$ имеет вид:

$$\sigma_{zz}(v_i) = 2G \left(c_i v_i J\left(0, \sqrt{v_i} r\right) - (\eta + 1) d \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu} T(t) \beta(T) q_i \right) e^{-\sqrt{v_i} z} W(t).$$

Общее выражение для осевых напряжений записывается следующим образом:

$$\sigma_{zz} = \left[2G(t) \sum_{i=1}^{\infty} \left(p_i J(0, \sqrt{v_i} r) e^{-\sqrt{v_i} z} - (\eta+1) k q_i e^{-\sqrt{v_i} z} \right) \right] W(t);$$

$$k = \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu} T(t) \beta(T).$$

При $z = 0$, $t = c/2$ запись относительного напряжения $\bar{\sigma}_{zz}$ в сечении $z = 0$

$$\bar{\sigma}_{zz} = \sum_{i=1}^{\infty} \left(p_i J(0, \sqrt{v_i} r) \right) - (\eta+1) d \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu} T_0 \beta(T_0)$$

является разложением постоянной

$$\bar{\sigma}_{zz} + (\eta+1) d \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu} T_0 \beta(T_0)$$

в ряд Фурье-Бесселя: $\sum_{i=1}^{\infty} p_i J(0, \sqrt{v_i} r)$. Множество всех

значений v_i находится из условий при $t = c/2$ и $z = 0$, $r = R$ значение $J(0, \sqrt{v_i} r) = 0,05$; обозначая $\xi_i = \sqrt{v_i} R$, ищем корни уравнения $J(0, \xi_i) = 0,05$. Коэффициенты p_i находятся по формуле

$$p_i = \frac{2 \left(1 + (\eta+1) d \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu} T(t) \beta(T) \right)}{R^2 J^2(1, \xi_i)} \int_0^R r J(0, \sqrt{v_i} r) dr.$$

Требование к напряжениям σ_{rz} – равенство их нулю на поверхности $r = R$ цилиндра. Сумма касательных напряжений находится по всем значениям v_i параметра v , определяемым по корням $\xi_i = \sqrt{v_i} R$ уравнения $J(1, \xi_i) = 0$. Найдены первые n положительных корней уравнения $J(1, \xi_i) = 0$, $\xi_i = \sqrt{v_i} R$.

Пусть $\frac{\sigma_{rz}}{2G} = \bar{\sigma}_{rz}$ – доля суммарного напряжения σ_{rz} в $2G$ в сечении $z = 0$ цилиндра в момент $t = c/2$. Наивысшее значение $\bar{\sigma}_{rz}$ формально равно единице.

Тогда в выражении $\bar{\sigma}_{rz} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} c_i v_i J(1, \sqrt{v_i} r) e^{-\sqrt{v_i} z} \right) W(t)$ содержится разложение единицы в ряд Фурье-Бесселя: $1 = \sum_{i=1}^{\infty} p_i J(1, \sqrt{v_i} r)$, где коэффициенты $p_i = c_i v_i$ находят-

ся по формуле $p_i = \frac{2}{R^2 J^2(2, \xi_i)} \int_0^R r J(1, \sqrt{v_i} r) dr$. Следовательно, касательные напряжения, действующие во всем теле цилиндра в течение времени действия импульса, можно представить

$$\sigma_{rz} = 2G(T) \left(\sum_{i=1}^{\infty} p_i J(1, \sqrt{v_i} r) e^{-\sqrt{v_i} z} \right) W(t).$$

ЧИСЛЕННЫЙ ПРИМЕР

Тепловой импульс длительностью 20 мс в форме равнобедренного треугольника с температурой $T = 1673$ К в вершине $t = 10$ мс прикладывается к плоской грани диска из улучшаемой легированной конструкционной стали марки 40ХН с радиусом $R = 0,012$ м и высотой $H = 0,010$ м. Согласно данным работы [20], оптимальный вариант обработки изделия из стали марки 40ХН (закалка в воду с температуры $T = 820$ °С, отпуск в масло с $T = 550$ °С) обеспечивает следующие характеристики изделия: $\chi = 7,81 \cdot 10^3$ кг/м³; $\sigma = 0,32$. При температурах 293 и 1153 К соответствующие значения модуля Юнга E и модуля сдвига G составляют $E_{293} = 204$ ГПа, $E_{1153} = 75$ ГПа и $G_{293} = 77,3$ ГПа, $G_{1153} = 28,4$ ГПа.

Напомним, что тепловой импульс модели $T(t)$, явившийся следствием принятой структуры объемной плотности мощности теплового потока $q(t, z) = \frac{a}{\lambda} q_0 f_1(t) f_2(z)$,

зависящей от времени в форме, заданной одной волной $f_1(t)$ функции Хевисайда, имеет вид:

$$T(t) = T_0 \left(\frac{2t}{c} - \frac{2}{c} (2t - c) H \left(t - \frac{2}{c} \right) + \frac{2(t - c)}{c} H(t - c) \right), \quad (6)$$

где $T_0 = 1673$ К – максимальная температура в импульсе (достигается в момент $t = c/2$).

Линейная аппроксимация зависимости линейного коэффициента температурного расширения $\beta(T)$ от температуры в интервале 300 – 1700 К для стали марки 40ХН, построенная по различным данным, равна:

$$\beta(T) = 11,12 \cdot 10^{-6} + 0,002847 \cdot 10^{-6} T(t), \quad 1/K;$$

$$\beta(T_0) = 15,98 \cdot 10^{-6}. \quad (7)$$

По двум точкам $G_{293} = 77,3$ ГПа и $G_{1153} = 28,4$ ГПа была аппроксимирована линейная зависимость модуля G от температуры T : $G(T) = 93,96 - 0,057T$, ГПа. С учетом уравнения (6) были получены развертки во времени зависимостей $G(t)$ и $\beta(t)$.

При вычислении множителя $\frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu}$ коэффициента $k = \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu} T_0 \beta(T)$ было учтено подобие числителя и знаменателя в множителе и подобие параметров Ламе λ , μ по температурной зависимости. Поэтому выбраны значения $\mu = G$ и $\lambda = 2\mu \frac{\sigma}{1 - \sigma}$ при усредненной температуре 873 К: $\mu = 49,8$ ГПа; $\lambda = 88,5$ ГПа; в результате $\frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu} = 1,941$.

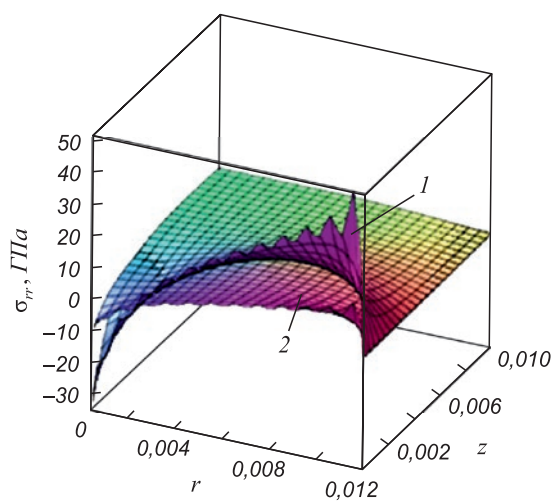
Исходя из физических представлений о возможных знаках термических напряжений, принято значение неопределенной постоянной $d = -1$. Компоненты σ_{rr} , $\sigma_{\phi\phi}$,

σ_{zz} , σ_{rz} тензора напряжений в виде функциональных рядов оценивали их отрезками из первых 24 членов ряда. Для вычислительных действий и построения графиков был использован пакет компьютерной математики Maple [21].

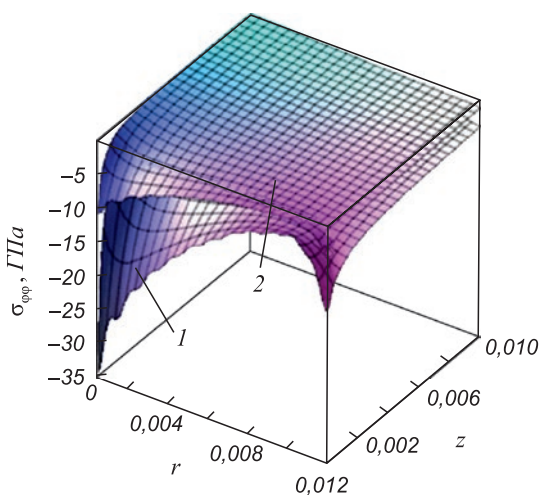
На рис. 1, 2 представлены графики зависимости компонент тензора термических напряжений в теле диска от пространственных координат r и z точки тела для двух моментов времени на переднем фронте теплового импульса.

Суммарной мерой уровня компонент тензора термоупругих напряжений является его инвариант (интенсивность напряжений):

$$\sigma_i = 2G(t) \frac{1}{\sqrt{2}} \times \left(\sqrt{(\sigma_r - \sigma_\varphi)^2 + (\sigma_\varphi - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2 + 6\sigma_{rz}^2} \right) W(t).$$



а



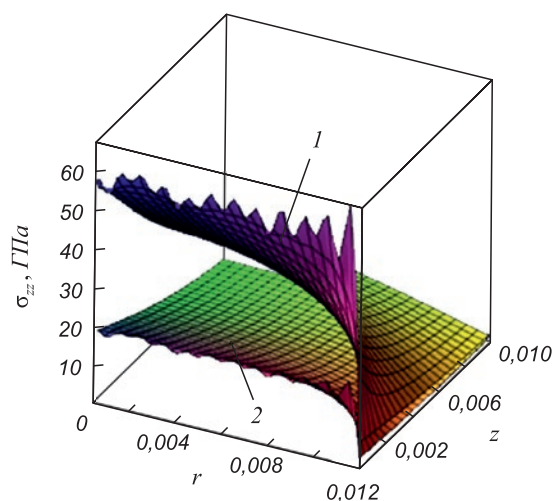
б

Рис. 1. Графики нормальных напряжений σ_{rr} (а) и $\sigma_{\varphi\varphi}$ (б): 1 и 2 – момент времени 5 и 9 мс

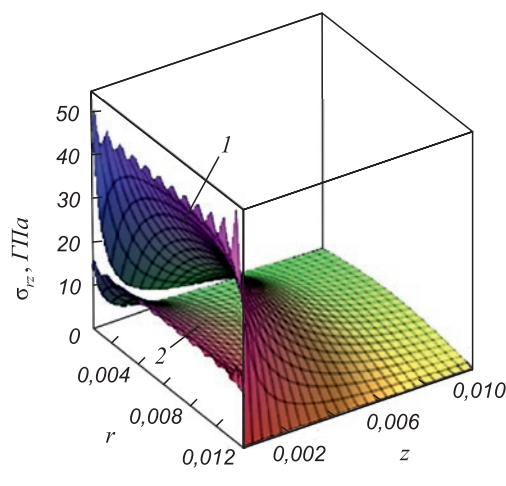
Fig. 1. Graphs of normal voltages σ_{rr} (а) and $\sigma_{\varphi\varphi}$ (б): 1 and 2 – time point 5 and 9 ms

Если полагать, что материал диска абсолютно упругий, то при рассматриваемой симметричной линейной форме температурного импульса и линейной аппроксимации зависимости $G(T)$ возникает симметрия графика интенсивности напряжений. Эта симметрия отражает конкуренцию двух процессов, протекающих одновременно на переднем фронте роста температуры: возрастают температурные напряжения и понижаются значения упругих коэффициентов E , G , λ , μ . Возникает картина околонулевых температурных напряжений как в начале переднего фронта, так и в его вершине. При прохождении заднего фронта теплового импульса ситуация повторяется, но в обратном порядке (рис. 3, а).

Ясно, что оценка $\sigma_i = 90$ ГПа при $t = 5$ мс не отражает реального поведения изделия из стали марки 40ХН, при таких тепловых деформациях материал изделия переходит в состояние пластического течения. В теории обработки металлов давлением известна формула опре-



а



б

Рис. 2. Графики нормальных σ_{zz} (а) и касательных σ_{rz} (б) напряжений: 1 и 2 – момент времени 5 и 9 мс

Fig. 2. Graphs of normal σ_{zz} (а) and tangent σ_{rz} (б) stresses: 1 and 2 – time point 5 and 9 ms

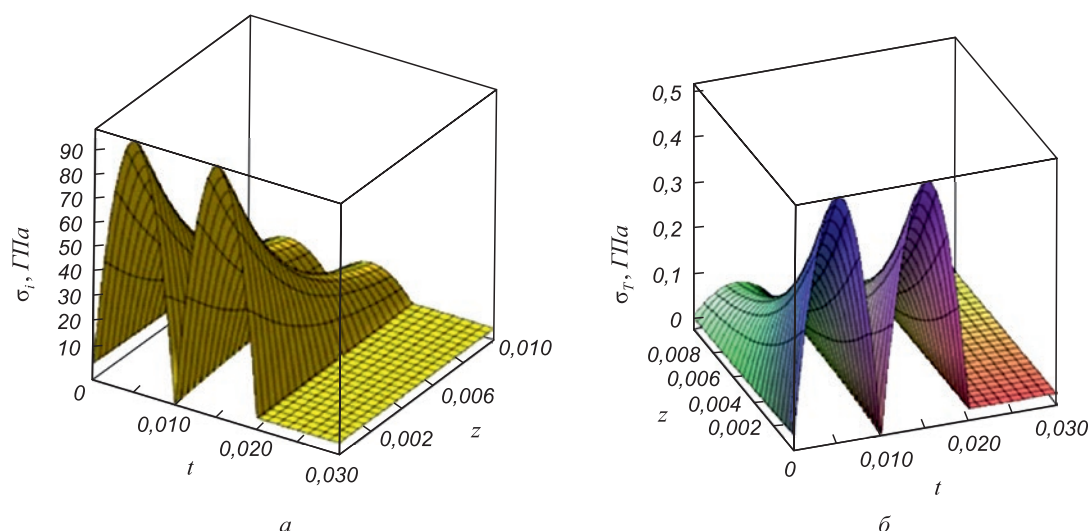


Рис. 3. Графики интенсивности упругих напряжений σ_i (а) и предела текучести σ_T (б) материала диска в зависимости от координат t, z при $r = 0,006$ м

Fig. 3. Graphs of the intensity of elastic stresses σ_i (a) and yield stress σ_T (b) of the disk material depending on coordinates t, z , $r = 0,006$ m

деления предела текучести в испытаниях на объемное напряженное состояние с осевой симметрией:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_r - \sigma_\phi)^2 + (\sigma_\phi - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2 + 6\sigma_{rz}^2} = \sigma_T.$$

На рис. 3, б представлена поверхность с интенсивностью σ_T , являющаяся верхней границей для допустимой зоны упругой деформации.

Таким образом, найдено частное решение линейного варианта задачи динамической термоупругости в приложении к моделированию поверхностного упрочнения металлических изделий энергетическим импульсом. Использование гиперболического уравнения теплопроводности в обобщенной задаче термоупругости преждевременно без ясного понимания механизма диссипации энергии в тепловой волне. Уравнение дви-

жения среды содержит модель температурного импульса, опробованную ранее на совместимость с частными случаями параболической и гиперболической теплопроводности. Для построения тензора термических напряжений использован классический термоупругий потенциал перемещений.

Выводы

Решение задачи позволило объяснить наличие пиков напряжений и интенсивности напряжений как следствие взаимно обратных процессов роста температурных напряжений и уменьшения коэффициентов упругости с ростом температуры. Численный пример предостерегает от опоры только на оценки решений задач термоупругости без учета пластических и вязких свойств материалов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

REFERENCES

1. Башенко Л.П., Ефименко И.Т., Будовских Е.А., Иванов Ю.Ф., Иванов К.В., Ионина А.В., Громов В.Е. Особенности модифицирования поверхностных слоев титана при электровзрывном науглероживании // Физика и химия обработки материалов. 2012. № 2. С. 65–69.
2. Heo K.-H., Munirathnam N.R., Lim J.-W., Le M.-T., Choi G.-S. Effect of oxygen and yttrium doping on the electrical resistivity and hardness of titanium metal obtained by electron beam melting // Materials Chemistry and Physics. 2008. Vol. 112. No. 3. P. 923–927. <https://doi.org/10.1016/j.matchemphys.2008.07.013>
3. Якушин В.Л., Аунг Тхурейн Хейн, Джумаев П.С., Исаенкова М.Г., Калинин Б.А., Леонтьева-Смирнова М.В., Наumenko И.А., Перлович Ю.А., Польский В.И. Модифицирование структурно-фазового состояния феррито-мартенситных сталей воздействием потоками импульсной газовой плазмы // Перспективные материалы. 2013. № 5. С. 5–14.
4. Saha A., Basu S., Kumar R. Effects of acoustic-streaming-induced flow in evaporating nanofluid droplets // Journal Fluid Mechanics. 2012. Vol. 692. P. 207–219. <https://doi.org/10.1017/jfm.2011.505>
1. Bashchenko L.P., Efimenko I.T., Budovskikh E.A., Ivanov Yu.F., Ivanov K.V., Ionina A.V., Gromov V.E. Features of modification of titanium surface layers during electroexplosive carburization. *Fizika i khimiya obrabotki materialov*. 2012, no. 2, pp. 65–69. (In Russ.).
2. Heo K.-H., Munirathnam N.R., Lim J.-W., Le M.-T., Choi G.-S. Effect of oxygen and yttrium doping on the electrical resistivity and hardness of titanium metal obtained by electron beam melting. *Materials Chemistry and Physics*. 2008, vol. 112, no. 3, pp. 923–927. <https://doi.org/10.1016/j.matchemphys.2008.07.013>
3. Yakushin V.L., Aung Tkhurein Khein, Dzhumaev P.S., Isaenkov M.G., Kalin B.A., Leont'eva-Smirnova M.V., Naumenko I.A., Perlovich Yu.A., Pol'skii V.I. Modification of structural-phase state of ferrite-martensitic steels by action of pulsed gas plasma flows. *Perspektivnye materialy*. 2013, no. 5, pp. 5–14. (In Russ.).
4. Saha A., Basu S., Kumar R. Effects of acoustic-streaming-induced flow in evaporating nanofluid droplets. *Journal Fluid Mechanics*. 2012, vol. 692, pp. 207–219. <https://doi.org/10.1017/jfm.2011.505>

5. Судьенков Ю.И., Сарнацкий В.М., Смирнов И.В. Ориентационный магнитный фазовый переход, индуцированный при ударном нагружении сплава Fe–Cr–Co // Физика твердого тела. 2017. Т. 59. № 2. С. 279–283. <https://doi.org/10.21883/FTT.2017.02.44048.113>
6. Dai W., Wang H., Jordan P.M., Mickens R.E. A mathematical model for skin burn injury induced by radiation heating // International Journal Heat Mass Transfer. 2008. Vol. 51. No. 23–24. P. 5497–5510. <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2008.01.006>
7. Cattaneo C. Sur une forme de l'équation de la chaleur éliminant le paradoxe d'une propagation instantée // Comptes Rendus Académie Science. 1958. Vol. 247. No. 4. P. 431–433.
8. Lord H., Shulman Y. A generalized dynamical theory of thermoelasticity // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 1967. Vol. 15. No. 5. P. 299–309. [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(67\)90024-5](https://doi.org/10.1016/0022-5096(67)90024-5)
9. Ordonez-Miranda J., Alvarado-Gil J.J. Thermal wave oscillations and thermal relaxation time determination in a hyperbolic heat transport model // International Journal of Thermal Sciences. 2009. Vol. 48. No. 11. P. 2053–2062. <https://doi.org/10.1016/j.ijthermalsci.2009.03.008>
10. Tzou D.Y. Macro-To Micro-Scale Heat Transfer: The Lagging Behavior. 2nd Edition. West Sussex, UK: John Wiley & Sons Ltd, 2015. 576 p.
11. Quintanilla R. Type II thermoelasticity. A new aspect // Journal of Thermal Stresses. 2009. Vol. 32. No. 3. P. 290–307. <https://doi.org/10.1080/01495730802637159>
12. Bulgakova N.M., Zhukov V.P., Sonina S.V., Meshcheryakov Y.P. Modification of transparent materials with ultrashort laser pulses: What is energetically and mechanically meaningful? // Journal Applied Physics. 2015. Vol. 118. No. 23. Article 233108. <https://doi.org/10.1063/1.4937896>
13. Zhukov V.P., Rubenchik A.M., Fedoruk M.P., Bulgakova N.M. Interaction of doughnut-shaped laser pulses with glasses // Journal of the Optical Society of America. 2017. Vol. 34. No. 2. P. 463–471. <https://doi.org/10.1364/JOSAB.34.000463>
14. Базайкин В.И., Базайкина О.Л., Осколкова Т.Н., Темлянец М.В. Математическое моделирование тепловых процессов при обработке поверхности металлоизделий высококонцентрированными потоками энергии // Известия вузов. Черная металлургия. 2017. Т. 60. № 5. С. 398–409. <https://doi.org/10.17073/0368-0797-2017-5-398-409>
15. Базайкин В.И., Базайкина О.Л., Темлянец М.В., Бабушкина О.С. Модель нагружения торца цилиндрического образца тепловым источником кратковременного действия с распределенной плотностью // Черные металлы. 2019. № 6 (1050). С. 57–63.
16. Базайкина О.Л. Модели теплового импульса, упрочняющего поверхность металлического изделия. В кн.: V Международная научно-практическая конференция «Моделирование и наукоемкие информационные технологии в технических и социально-экономических системах», 14 апреля 2021 г. Новокузнецк: ИЦ СибГИУ, 2021. С. 87–93.
17. Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости / В.Д. Купрадзе, Т.Г. Гегелия, М.О. Башелейшвили, Т.В. Бурчуладзе. М.: Наука, 1976. 664 с.
18. Мелан Э., Паркус Г. Термоупругие напряжения, вызываемые стационарными температурными полями. М.: Госиздат. физ.-мат. Литературы, 1958. 167 с.
19. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. М.: Высшая школа, 1970. 712 с.
20. Тылкин М.А. Справочник термиста ремонтной службы. М.: Изд-во Металлургия, 1981. 648 с.
21. Maple 10. User Manual. Toronto: Maplesoft, a division of Waterloo Maple Inc., 2005. 398 p.
5. Sud'enkov Yu.I., Sarnatskii V.M., Smirnov I.V. Orientation magnetic phase transition induced by shock loading of the Fe–Cr–Co alloy. *Physics of the Solid State*. 2017, vol. 59, no. 2, pp. 287–291. <https://doi.org/10.1134/S1063783417020287>
6. Dai W., Wang H., Jordan P.M., Mickens R.E. A mathematical model for skin burn injury induced by radiation heating. *International Journal Heat Mass Transfer*. 2008, vol. 51, no. 23–24, pp. 5497–5510. <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2008.01.006>
7. Cattaneo C. Sur une forme de l'équation de la chaleur éliminant le paradoxe d'une propagation instantée. *Comptes Rendus Académie Science*. 1958, vol. 247, no. 4, pp. 431–433. (In Fr.).
8. Lord H., Shulman Y. A generalized dynamical theory of thermoelasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 1967, vol. 15, no. 5, pp. 299–309. [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(67\)90024-5](https://doi.org/10.1016/0022-5096(67)90024-5)
9. Ordonez-Miranda J., Alvarado-Gil J.J. Thermal wave oscillations and thermal relaxation time determination in a hyperbolic heat transport model. *International Journal of Thermal Sciences*. 2009, vol. 48, no. 11, pp. 2053–2062. <https://doi.org/10.1016/j.ijthermalsci.2009.03.008>
10. Tzou D.Y. *Macro-To Micro-Scale Heat Transfer: The Lagging Behavior*. 2nd Edition. West Sussex, UK: John Wiley & Sons Ltd, 2015, 576 p.
11. Quintanilla R. Type II thermoelasticity. A new aspect. *Journal of Thermal Stresses*. 2009, vol. 32, no. 3, pp. 290–307. <https://doi.org/10.1080/01495730802637159>
12. Bulgakova N.M., Zhukov V.P., Sonina S.V., Meshcheryakov Y.P. Modification of transparent materials with ultrashort laser pulses: What is energetically and mechanically meaningful? *Journal Applied Physics*. 2015, vol. 118, no. 23, article 233108. <https://doi.org/10.1063/1.4937896>
13. Zhukov V.P., Rubenchik A.M., Fedoruk M.P., Bulgakova N.M. Interaction of doughnut-shaped laser pulses with glasses. *Journal of the Optical Society of America*. 2017, vol. 34, no. 2, pp. 463–471. <https://doi.org/10.1364/JOSAB.34.000463>
14. Bazaikin V.I., Bazaikina O.L., Oskolkova T.N., Temlyantsev M.V. Mathematical modeling of thermal processes at surface treatment of metal products with highly concentrated energy flows. *Izvestia. Ferrous Metallurgy*. 2017, vol. 60, no. 5, pp. 398–409. (In Russ.). <https://doi.org/10.17073/0368-0797-2017-5-398-409>
15. Bazaikin V.I., Bazaikina O.L., Temlyantsev M.V., Babushkina O.S. The loading model of the cylindrical sample's end face with a short-term distributed density heat source. *Chernye metally*. 2019, no. 6, pp. 57–63. (In Russ.).
16. Bazaikina O.L. Models of thermal pulse strengthening the surface of metal product. In: *Proceedings of the V Int. Sci. and Pract. Conf. "Modeling and High-Tech Information Technologies in Technical and Socio-Economic Systems"*, 14 April 2021. Novokuznetsk: ITs SibSIU, 2021, pp. 87–93. (In Russ.).
17. Kupradze V.D., Gegeliya T.G., Basheleishvili M.O., Burchuladze T.V. *Three-Dimensional Problems of the Mathematical Theory of Elasticity and Thermoelasticity*. Moscow: Nauka, 1976, 664 p. (In Russ.).
18. Melan E., Parkus H. *Wärmespannungen infolge Stationärer Temperaturfelder*. Wein, Springer Verl., 1953. (Russ. ed.: Melan E., Parkus H. *Termouprugie napryazheniya, vyzvaemye statsionarnymi temperaturnymi polyami*. Moscow: Gosizdat. FML, 1958, 167 p.). (In Germ.).
19. Koshlyakov N.S., Gliner E.B., Smirnov M.M. *Partial Differential Equations of Mathematical Physics*. Moscow: Vysshaya shkola, 1970, 712 p. (In Russ.).
20. Tylkin M.A. *Guide of Thermist of the Repair Service*. Moscow: Izdvo Metallurgiya, 1981, 648 p. (In Russ.).
21. *Maple 10. User Manual*. Toronto: Maplesoft, a division of Waterloo Maple Inc., 2005, 398 p.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Михаил Викторович Темлянцева, д.т.н., профессор, проректор по учебной и воспитательной работе, Сибирский государственный индустриальный университет
ORCID: 0000-0001-7985-5666
E-mail: uchebn_otdel@sibsiu.ru

Ольга Леонидовна Базайкина, к.т.н., доцент кафедры специальной техники и информационных технологий, Владимирский юридический институт ФСИН России
ORCID: 0000-0002-8612-9168
E-mail: bazayolga@yandex.ru

Елена Николаевна Темлянцева, к.т.н., доцент, заведующий кафедрой теплоэнергетики и экологии, Сибирский государственный индустриальный университет
E-mail: elena.temlyantseva@yandex.ru

Владимир Яковлевич Целлермаер, д.т.н., профессор кафедры теплогазоводоснабжения, водоотведения и вентиляции, Сибирский государственный индустриальный университет

Mikhail V. Temlyantsev, Dr. Sci. (Eng.), Prof., Vice-Rector for Educational and Tutorial Work, Siberian State Industrial University
ORCID: 0000-0001-7985-5666
E-mail: uchebn_otdel@sibsiu.ru

Ol'ga L. Bazaikina, Cand. Sci. (Eng.), Assist. Prof. of the Chair of Special Equipment and Information Technologies, Vladimir Law Institute of the Federal Penitentiary Service of Russia
ORCID: 0000-0002-8612-9168
E-mail: bazayolga@yandex.ru

Elena N. Temlyantseva, Cand. Sci. (Eng.), Assist. Prof., Head of the Chair "Thermal Power and Ecology", Siberian State Industrial University
E-mail: elena.temlyantseva@yandex.ru

Vladimir Ya. Tsellernaer, Dr. Sci. (Eng.), Prof. of the Chair of Heat – Gas – Water Supply, Water Disposal and Ventilation, Siberian State Industrial University

ВКЛАД АВТОРОВ:

Темлянцева М.Н. – научное руководство, разработка концепции научного исследования, написание выводов статьи.

Базайкина О.Л. – проведение исследования, формирование основных концепций, анализ полученных результатов, написание численного примера.

Темлянцева Е.Н. – анализ выбора граничных условий для напряжений общего вида, содействие в написании статьи.

Целлермаер В.Я. – доработка текста статьи, корректировка выводов.

Поступила в редакцию 06.09.2021

После доработки 07.10.2021

Принята к публикации 08.10.2021

Received 06.09.2021

Revised 07.10.2021

Accepted 08.10.2021