

*С.П. Мочалов, С.Н. Калашников, П.С. Мочалов*

Сибирский государственный индустриальный университет

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ТЕПЛООБМЕНА И ОЦЕНКА ТЕПЛОВЫХ ПОТЕРЬ В ВИХРЕВОЙ ТОПКЕ АВТОМАТИЗИРОВАННОГО ЭНЕРГОГЕНЕРИРУЮЩЕГО КОМПЛЕКСА\*

Вихревая топка геометрически представляет собой снаружи прямоугольный параллелепипед, внутри которого находится цилиндрическая полость, в которой происходит сжигание водоугольного топлива (ВУТ). Для оценки тепловых потоков и потерь со стороны вихревой топке предлагается рассчитать их для топков, в одной из которых внутренняя полость представляет собой прямоугольный параллелепипед, вписанный в цилиндрическую полость, а в другой – прямоугольный параллелепипед, описанный вокруг цилиндрической полости. В качестве оценки для тепловых потерь и потоков со стороны вихревой топки с цилиндрической полостью предлагается взять среднеарифметическое значение этих величин со стороны топков с внутренними полостями в виде прямоугольных параллелепипедов, для которых расчет интересующих теплофизических характеристик проводить в декартовых координатах в трехмерном приближении.

Динамика изменения температурных полей в стенках вихревой топки с внутренней полостью в виде прямоугольного параллелепипеда в декартовых координатах  $x, y, z$  описывается с помощью уравнения теплопроводности

$$c\rho \frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial t}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial t}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda \frac{\partial t}{\partial z} \right), \quad (1)$$

с граничными условиями III рода

$$\lambda \frac{\partial t}{\partial n} = \alpha_k (t_k - t); \quad (2)$$

где  $c$  – удельная теплоемкость;  $\rho$  – плотность;  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности материалов стенки вихревой топки;  $\tau$  – время;  $n$  – нормаль к соответствующему  $k$ -му участку границы вихревой топки как внутри ее, так и снаружи;  $t$  и  $t_k$  – температура стенки на участке границы и среды со стороны  $k$ -го участка границы, °С;

\* Работа выполнена в соответствии с реализацией Минобрнаукой России комплексного проекта по созданию высокотехнологичного производства «Разработка технологии и создание пилотного образца автоматизированного энергогенерирующего комплекса, работающего на отходах углеобогащения», шифр 2010-218-02-174.

$\alpha_k$  – коэффициент теплоотдачи со стороны соответствующего  $k$ -го участка стенки вихревой камеры, Вт/(м<sup>2</sup>·°С).

Геометрически вихревая топка рассматривается в трехмерном приближении. На рис. 1 показана четверть всей топки, которая выбирается как расчетная область в силу геометрической симметрии задачи.

Рассматривается случай, когда стенка вихревой топки состоит из двух материалов со своими теплофизическими характеристиками:  $c_1 = 0,94$  кДж/(кг·°С),  $\rho_1 = 1875$  кг/м<sup>3</sup>,  $\lambda_1 = 1,28$  Вт/(м·°С) для шамотного кирпича ШБ-5 со стороны внутреннего объема вихревой топки и  $c_2 = 0,84$  кДж/(кг·°С),  $\rho_2 = 46$  кг/м<sup>3</sup>,  $\lambda_2 = 0,036$  Вт/(м·°С) для изовера (теплоизоляционного материала) со стороны внешней среды.

Рассмотрим конечно-разностную аппроксимацию операторов в уравнении (1) по координатам  $x, y, z$ .

Стенка вихревой топки заменяется на трехмерную сеточную область с равномерными шагами дискретизации  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  по соответствующим координатным осям. Температура  $t$  внутри и на границе стенки вихревой топки заменяется на дискретные значения  $t_{ijk}$  в узлах трехмерной сеточной области. На рис. 1 показаны

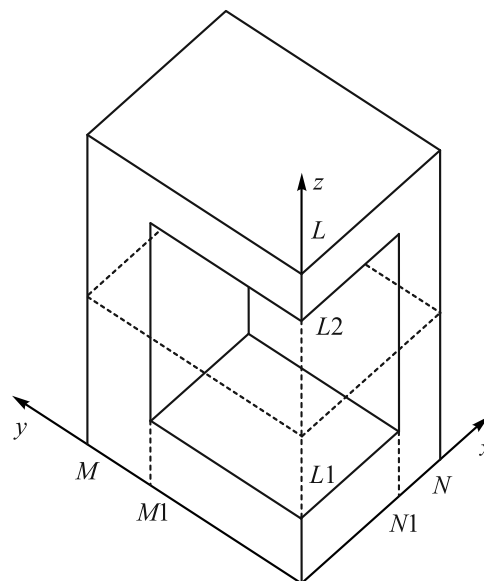


Рис. 1. Расчетная область для решения уравнения теплопроводности

номера узлов по соответствующей координатной оси на границах расчетной области.

Аппроксимация осуществляется с помощью 7-точечного трехмерного шаблона, представленного на рис. 2, где показана нумерация узлов трехмерного шаблона соответственно по координатам  $x, y, z$ .

Как показано на рис. 3 к узлу сеточной области с номером  $ijk$  примыкают восемь элементарных объемов величиной  $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$ , в центре которых находятся восемь вспомогательных узлов сеточной области с дробными значениями индексов  $i \pm 1/2, j \pm 1/2, k \pm 1/2$ .

Дифференциальное уравнение (1) аппроксимируется с помощью системы конечно-разностных уравнений относительно значений температуры стенки вихревой топки в узлах с целыми значениями индексов  $ijk$ . Значения же теплофизических параметров  $c, \rho, \lambda$  материалов стенки, в том числе и разных, задаются в узлах с дробными значениями индексов  $i \pm 1/2, j \pm 1/2, k \pm 1/2$ , т.е. внутри каждого элементарного объема, полученного при разбиении исходной области по координатам  $x, y, z$ .

Конечно-разностная аппроксимация выражения (1) с помощью конечно-разностной явной схемы имеет следующий вид:

$$c_{ijk} \rho_{ijk} \frac{\tilde{t}_{ijk} - t_{ijk}}{\Delta \tau} = \frac{1}{\Delta x} \left( \lambda_{i+\frac{1}{2},j,k} \frac{(t_{i+1,j,k} - t_{ijk})}{\Delta x} - \lambda_{i-\frac{1}{2},j,k} \frac{(t_{ijk} - t_{i-1,j,k})}{\Delta x} \right) + \frac{1}{\Delta y} \left( \lambda_{i,j+\frac{1}{2},k} \frac{(t_{i,j+1,k} - t_{ijk})}{\Delta y} - \lambda_{i,j-\frac{1}{2},k} \frac{(t_{ijk} - t_{i,j-1,k})}{\Delta y} \right) + \frac{1}{\Delta z} \left( \lambda_{i,j,k+\frac{1}{2}} \frac{(t_{i,j,k+1} - t_{ijk})}{\Delta z} - \lambda_{i,j,k-\frac{1}{2}} \frac{(t_{ijk} - t_{i,j,k-1})}{\Delta z} \right), \quad (3)$$

где  $\tilde{t}_{ijk}$  – значение температуры в узлах сетки на следующем шаге по времени.

Таким образом, возникает необходимость оценки значений теплофизических параметров  $\rho_{ijk}$  и  $c_{ijk}$  в основ-

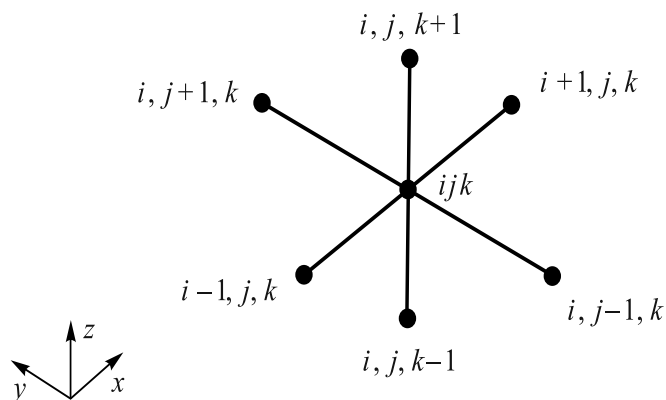


Рис. 2. Конечно-разностный шаблон для построения конечно-разностной схемы

ных узлах сеточной области и оценки значений  $\lambda_{i \pm \frac{1}{2},j,k}$ ,  $\lambda_{i,j \pm \frac{1}{2},k}$ ,  $\lambda_{i,j,k \pm \frac{1}{2}}$  с помощью значений  $\rho_{i \pm \frac{1}{2},j \pm \frac{1}{2},k \pm \frac{1}{2}}$ ,  $c_{i \pm \frac{1}{2},j \pm \frac{1}{2},k \pm \frac{1}{2}}$  и  $\lambda_{i \pm \frac{1}{2},j \pm \frac{1}{2},k \pm \frac{1}{2}}$ , заданных во вспомогательных узлах этой области с дробными значениями индексов.

Оценка величины  $\rho_{ijk}$  с помощью плотностей примыкающих восьми элементарных объемов реализуется как их среднее значение с помощью соотношения

$$\rho_{ijk} = \frac{\sum_{\alpha=\pm\frac{1}{2}} \sum_{\beta=\pm\frac{1}{2}} \sum_{\gamma=\pm\frac{1}{2}} \rho_{i+\alpha,j+\beta,k+\gamma}}{8} \quad (4)$$

исходя из приближения, что эти восемь элементарных объемов, даже будучи представителями материалов с различными плотностями, вместе образуют однородный материал с соответствующей плотностью.

Оценка величины  $c_{ijk}$  с помощью значений удельных теплоемкостей и плотностей примыкающих восьми элементарных объемов реализуется с помощью соотношения

$$c_{ijk} = \frac{\sum_{\alpha=\pm\frac{1}{2}} \sum_{\beta=\pm\frac{1}{2}} \sum_{\gamma=\pm\frac{1}{2}} \rho_{i+\alpha,j+\beta,k+\gamma} c_{i+\alpha,j+\beta,k+\gamma}}{\sum_{\alpha=\pm\frac{1}{2}} \sum_{\beta=\pm\frac{1}{2}} \sum_{\gamma=\pm\frac{1}{2}} \rho_{i+\alpha,j+\beta,k+\gamma}} \quad (5)$$

исходя из приближения, что эти восемь элементарных объемов, даже будучи представителями материалов с различными удельными теплоемкостями и плотностями, а также получив индивидуально определенное количество тепла, вместе образуют однородный материал

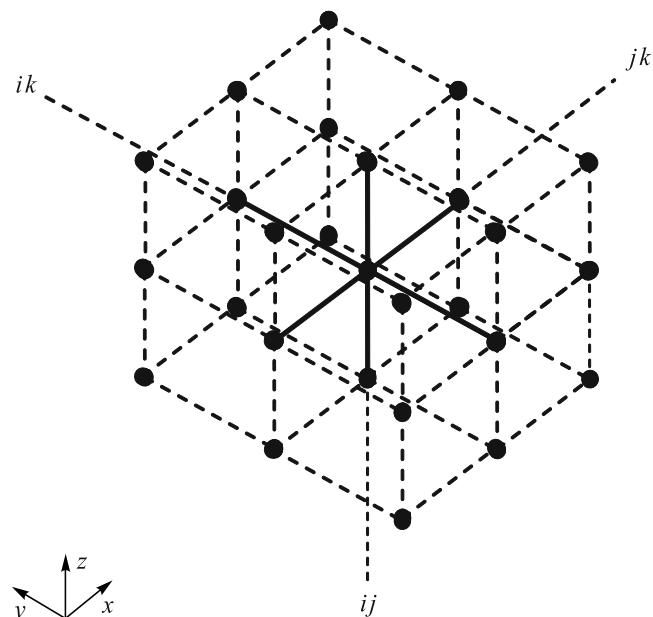


Рис. 3. Элементарные объемы, примыкающие к узлу сеточной области с номером  $ijk$

с соответствующей удельной теплоемкостью, который получил количество тепла, равное сумме полученного всеми элементарными объемами тепла.

Оценка значений  $\lambda$  в требуемых узлах осуществляется с помощью коэффициента теплопроводности элементарных объемов следующим образом:

$$\begin{aligned} \lambda_{i+\frac{1}{2},j,k} &= \frac{\lambda_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} + \lambda_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} + \lambda_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} + \lambda_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}}{4}; \\ \lambda_{i-\frac{1}{2},j,k} &= \frac{\lambda_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} + \lambda_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} + \lambda_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} + \lambda_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}}{4}; \\ \lambda_{i,j+\frac{1}{2},k} &= \frac{\lambda_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} + \lambda_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} + \lambda_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} + \lambda_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}}{4}; \\ \lambda_{i,j-\frac{1}{2},k} &= \frac{\lambda_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} + \lambda_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} + \lambda_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} + \lambda_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}}{4}; \\ \lambda_{i,j,k+\frac{1}{2}} &= \frac{\lambda_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} + \lambda_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} + \lambda_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} + \lambda_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}}{4}; \\ \lambda_{i,j,k-\frac{1}{2}} &= \frac{\lambda_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} + \lambda_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} + \lambda_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} + \lambda_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}}{4}. \end{aligned} \quad (6)$$

Аппроксимация граничных условий III рода  $\lambda \frac{\partial t}{\partial n} = \alpha_k(t_k - t)$  на соответствующем участке границы осуществляется с помощью трехточечной вглубь области аппроксимации производной вдоль нормали к соответствующему участку границы с помощью соотношения

$$\lambda_k \frac{3t_r - 4t_{r-1} + t_{r-2}}{2\Delta n} = \alpha_k(t_k - t_r). \quad (7)$$

В результате получим следующее соотношение для вычисления температуры на соответствующей границе:

$$t_r = \frac{2\alpha_k \Delta x t_k + \lambda_k (4t_{r-1} - t_{r-2})}{2\alpha_k \Delta x + 3\lambda_k}. \quad (8)$$

На различных участках границы расчетной области получают следующие соотношения для расчета температуры на границе:

граница 1 – внутренняя граница (плоскость  $x0z$ )

$$t_{i,0,k} = \frac{4t_{i,1,k} - t_{i,2,k}}{3}; \quad (9)$$

граница 2 – внутренняя граница (плоскость  $y0z$ )

$$t_{0,j,k} = \frac{4t_{1,j,k} - t_{2,j,k}}{3}; \quad (10)$$

граница 3 – «снаружи снизу» (плоскость  $x0y$ )

$$t_{i,j,0} = \frac{2\alpha_1 \Delta z t_2 + \lambda_2 (4t_{i,j,1} - t_{i,j,2})}{2\alpha_1 \Delta z + 3\lambda_2}; \quad (11)$$

граница 4 – «снаружи сверху» (плоскость  $x0y$ )

$$t_{i,j,L} = \frac{2\alpha_1 \Delta z t_2 + \lambda_2 (4t_{i,j,L-1} - t_{i,j,L-2})}{2\alpha_1 \Delta z + 3\lambda_2}; \quad (12)$$

граница 5 – «сверху внутри топки»

$$t_{i,j,L1} = \frac{2\alpha_4 \Delta z t_1 + \lambda_1 (4t_{i,j,L1-1} - t_{i,j,L1-2})}{2\alpha_4 \Delta z + 3\lambda_1}; \quad (13)$$

граница 6 – граница «внизу внутри»

$$t_{i,j,L2} = \frac{2\alpha_4 \Delta z t_1 + \lambda_1 (4t_{i,j,L2+1} - t_{i,j,L2+2})}{2\alpha_4 \Delta z + 3\lambda_1}; \quad (14)$$

граница 7 – «сбоку по  $y$ »

$$t_{i,M,k} = \frac{2\alpha_3 \Delta y t_2 + \lambda_2 (4t_{i,M-1,k} - t_{i,M-2,k})}{2\alpha_3 \Delta y + 3\lambda_2}; \quad (15)$$

граница 8 – «внутри по  $y$ »

$$t_{i,M1,k} = \frac{2\alpha_3 \Delta y t_1 + \lambda_1 (4t_{i,M-1,k} - t_{i,M-2,k})}{2\alpha_3 \Delta y + 3\lambda_1}; \quad (16)$$

граница 9 – «сбоку по  $x$ »

$$t_{N,j,k} = \frac{2\alpha_3 \Delta x t_2 + \lambda_2 (4t_{N-1,j,k} - t_{N-2,j,k})}{2\alpha_3 \Delta x + 3\lambda_2}; \quad (17)$$

граница 10 – «внутри по  $x$ »

$$t_{N1,j,k} = \frac{2\alpha_4 \Delta x t_1 + \lambda_1 (4t_{N1+1,j,k} - t_{N1+2,j,k})}{2\alpha_4 \Delta x + 3\lambda_1}. \quad (18)$$

Результаты исследования на математической модели процессов теплообмена в вихревой топке представлены в виде ниже приведенных значений и графиков (рис. 4) распределения температуры по толщине боковой стенки топки в самом тонком ее месте толщиной 0,34 м (0,24 м составляет шамотный кирпич; 0,1 м – теплоизоляционный материал изовер) для различных моментов времени  $\tau$  (1, 2, 3, 4 ч) после запуска вихревой топки и коэффициентами теплоотдачи  $\alpha$  конвекцией со стороны окружающего воздуха при его свободном движении, равными 5 и 10 Вт/(м<sup>2</sup>·°С). При этом температура внутри вихревой топки принята равной 1100 °С, а температура воздуха снаружи – 20 °С. Ниже приведены значения температуры (числитель – при  $\alpha = 5$  Вт/(м<sup>2</sup>·°С); знаменатель – при  $\alpha = 10$  Вт/(м<sup>2</sup>·°С)) на внутренней и внешней стенках вихревой топки, а также на стыке шамота и изовера (при  $x = 0,24$  м).

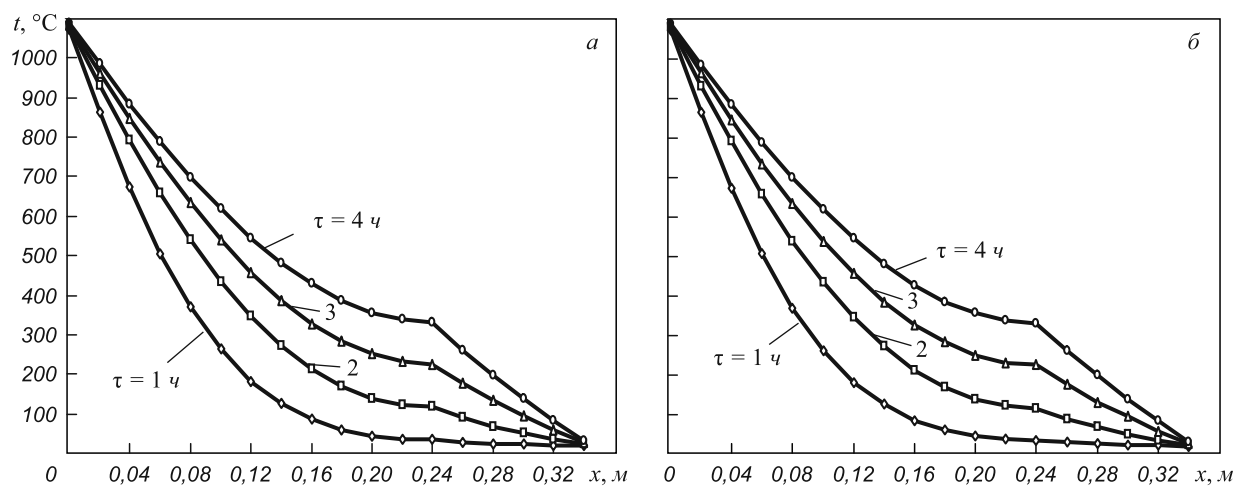


Рис. 4. Графики распределения температур по толщине стенки вихревой топки при  $\alpha = 5 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot ^\circ\text{С})$  (а) и при  $\alpha = 10 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot ^\circ\text{С})$  (б)

$\tau, \text{ч}$	Значение $t$ при $x, \text{м}$ , равном		
	0	0,24	0,34
1	1072/1072	35/35	20/20
2	1080/1080	117/117	24/22
3	1084/1084	226/226	31/26
4	1087/1087	332/332	38/30

стенке вихревой топки. Полученное решение позволяет оценить величину тепловых потерь через стенки вихревой топки. Поставленная задача математической физики решена численным конечно-разностным методом. Методика решения поставленной задачи может быть использована при расчете температурных полей и оценке тепловых потерь в других агрегатах теплоэнергетики.

**Выводы.** Поставлена и решена краевая задача математической физики для оценки температурных полей в

© 2012 г. С.П. Мочалов, С.Н. Калашиников, П.С. Мочалов  
Поступила 23 апреля 2012 г.