ISSN: 0368–0797. Известия высших учебных заведений. Черная металлургия. 2017. Том 60. № 11. С. 877 – 882.

УДК 536.2 (075) 46

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ПОЛУЧЕНИЯ ТОЧНЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ИСТОЧНИКАМИ ТЕПЛОТЫ*

Кудинов И.В., *к.т.н., доцент кафедры «Теоретические основы теплотехники и гидродинамики»* (totig@yandex.ru)
Стефанюк Е.В., *д.т.н., профессор кафедры «Теоретические основы теплотехники и гидромеханика»*
Скворцова М.П., *аспирант кафедры «Теретические основы теплотехники и гидродинамики»*
Максименко Г.Н., *аспирант кафедры «Теретические основы теплотехники и гидродинамики»*

Самарский государственный технический университет
(443100, Россия, Самара, ул. Молодогвардейская, 244)

Аннотация. Путем применения дополнительной искомой функции и дополнительных граничных условий в интегральном методе теплового баланса получено точное аналитическое решение задачи теплопроводности для полубесконечной пластины при симметричных граничных условиях первого рода с равномерно распределенным источником теплоты. Введение дополнительной искомой функции, представляющей изменение температуры во времени в центре пластины, основывается на описываемой параболическим уравнением теплопроводности бесконечной скорости распространения теплоты, согласно которой температура в любой точке пластины начинает изменяться сразу после приложения граничного условия первого рода на ее поверхности. Дополнительные граничные условия находятся так, чтобы их выполнение искомым решением было эквивалентно выполнению уравнения краевой задачи в граничных точках. При их нахождении используется дифференциальное уравнение и заданные граничные условия. Приведенные общие формулы позволяют найти дополнительные граничные условия для любого числа приближений. Показано, что выполнение уравнения в граничных точках приводит к его выполнению и внутри области с точностью, зависящей от числа приближений (числа дополнительных граничных условий). Использование интегрального метода теплового баланса позволяет свести решение уравнения в частных производных к интегрированию обыкновенного уравнения относительно дополнительной искомой функции. Отсутствие необходимости интегрирования исходного уравнения по пространственной переменной позволяет использовать данный метод при решении многих сложных краевых задач (нелинейных, с переменными коэффициентами и др.), для которых затруднительно получить решение с помощью классических точных аналитических методов. Используя найденное аналитическое решение, а также результаты изменения температуры во времени в одной из точек пластины, полученные методом конечных разностей, путем решения обратной задачи теплопроводности восстановлена мощность внутреннего источника теплоты. Результаты работы могут быть использованы для идентификации источников теплоты, возникающих при воздействии электромагнитных волн, высокочастотных колебаний и прочее, а также при плавлении или кристаллизации сплавов, сопровождающихся возникновением внутренних источников теплоты.

Ключевые слова: нестационарная теплопроводность, полубесконечная пластина, источник теплоты, бесконечная скорость распространения теплоты, интегральный метод теплового баланса, точное аналитическое решение, дополнительная искомая функция, дополнительные граничные условия.

DOI: 10.17073/0368-0797-2017-11-877-882

В теории теплопроводности известны методы, которые основаны на определении фронта температурного возмущения – глубины прогретого слоя [1 – 12]. Их использование сопровождается разделением процесса теплопроводности на две стадии по времени. Первая стадия характеризуется постепенным продвижением фронта температурного возмущения от поверхности тела до его центра, а вторая – изменением температуры во всем его объеме. В настоящей работе рассматривается метод получения точного аналитического решения, позволяющий избежать рассмотрения первой стадии процесса.

Основные положения метода рассмотрим на примере решения задачи теплопроводности для пластины с источником теплоты в следующей математической постановке

$$\frac{\partial\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}} = \frac{\partial^2\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\xi^2} + \mathrm{Po},\ (\mathrm{Fo}>0;\ 0<\xi<\delta); \quad (1)$$

$$\Theta(\xi,0) = 0; \quad (2)$$

$$\frac{\partial\Theta(0,\mathrm{Fo})}{\partial\xi} = 0; \quad (3)$$

$$\Theta(1,\mathrm{Fo}) = 1, \quad (4)$$

где $\Theta = \dfrac{T-T_0}{T_{\text{ст}}-T_0}$ – безразмерная температура; $\xi = x/\delta$ – безразмерная координата; $\mathrm{Fo} = a\tau/\delta^2$ – число Фурье;

* Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках базовой части государственного задания ФГБОУ ВО «СамГТУ» (проект № 1.5551.2017/БЧ).

$\mathrm{Po} = \dfrac{\omega\delta^2}{\lambda(T_{\text{ст}} - T_0)}$ – число Померанцева; T – температура; x – координата; τ – время; T_0 – начальная температура; $T_{\text{ст}}$ – температура стенки; a – коэффициент температуропроводности; δ – половина толщины пластины; ω – мощность внутренних источников теплоты; λ – коэффициент теплопроводности.

Введем дополнительную искомую функцию

$$q(\mathrm{Fo}) = \Theta(0, \mathrm{Fo}), \tag{5}$$

представляющую изменение во времени температуры в центре пластины $\xi = 0$. Очевидно, что величина $q(\mathrm{Fo})$ ввиду описываемой уравнением (1) бесконечной скорости распространения теплоты начинает изменяться тотчас же после приложения граничного условия первого рода в точке $\xi = 1$. Следовательно, диапазон ее изменения включает весь диапазон времени нестационарного процесса $0 < \mathrm{Fo} < \infty$.

Решение задачи (1) – (4) принимается в виде

$$\Theta(\xi, \mathrm{Fo}) = 1 + \frac{\mathrm{Po}}{2}\left(1 - \xi^2\right) + \sum_{k=1}^{n} b_k(q)\,\varphi_k(\xi), \tag{6}$$

где $b_k(q)$ – неизвестные коэффициенты; $\varphi_k(\xi) = \cos(r\pi\xi/2)$; $(r = 2k - 1,\ k = \overline{1, n})$ – координатные функции.

Соотношение (6), благодаря принятой системе координатных функций, в любом приближении точно удовлетворяет граничным условиям (3), (4). Неизвестные коэффициенты $b_k(q)$ находятся из условия (5) и некоторых дополнительных граничных условий [1, 10 – 18].

Для нахождения первого из них продифференцируем (5) по Fo

$$\frac{dq(\mathrm{Fo})}{d\mathrm{Fo}} = \frac{\partial\Theta(0, \mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}}. \tag{7}$$

Сравнивая соотношение (7) с уравнением (1), получаем дополнительное граничное условие вида

$$\mathrm{Po} + \frac{\partial^2\Theta(0, \mathrm{Fo})}{\partial\xi^2} = \frac{dq(\mathrm{Fo})}{d\mathrm{Fo}}. \tag{8}$$

Дифференцируя (8) по переменной Fo, с учетом уравнения (1) находим

$$\frac{\partial^4\Theta(0, \mathrm{Fo})}{\partial\xi^4} = \frac{d^2q(\mathrm{Fo})}{d\mathrm{Fo}^2}. \tag{9}$$

Общая формула для этих условий имеет вид

$$\frac{\partial^{2i}\Theta(0, \mathrm{Fo})}{\partial\xi^{2i}} = \frac{d^iq(\mathrm{Fo})}{d\mathrm{Fo}^i} \quad (i = 2, 3, 4, \ldots). \tag{10}$$

В первом приближении, подставляя (6) (ограничиваясь одним членом ряда) в (5), для определения неизвестного коэффициента $b_1(q)$, будем иметь алгебраическое линейное уравнение, из решения которого находим $b_1(q) = q(\mathrm{Fo}) - 1 - \dfrac{\mathrm{Po}}{2}$. Соотношение (6) с учетом $b_1(q)$ будет

$$\Theta(\xi, \mathrm{Fo}) = 1 + \frac{\mathrm{Po}\left(1 - \xi^2\right)}{2} + \left(q - 1 - \frac{\mathrm{Po}}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi\xi}{2}\right). \tag{11}$$

Потребуем, чтобы соотношение (11) удовлетворяло некоторому осредненному уравнению – интегралу теплового баланса

$$\int_0^1 \frac{\partial\Theta(\xi, \mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}}\,d\xi = \int_0^1\left(\frac{\partial^2\Theta(\xi, \mathrm{Fo})}{\partial\xi^2} + \mathrm{Po}\right)d\xi. \tag{12}$$

Подставляя (11) в (12), получаем

$$\frac{8dq}{d\mathrm{Fo}} + 2\pi^2 q - \pi^2(2 + \mathrm{Po}) = 0. \tag{13}$$

Интегрируя уравнения (13), находим

$$d(\mathrm{Fo}) = 1 + \frac{\mathrm{Po}}{2} + C_1\exp\left(-\frac{\pi^2\mathrm{Fo}}{4}\right), \tag{14}$$

где C_1 – постоянная интегрирования.

Подставляя (14) в (11), получаем

$$\Theta(\xi, \mathrm{Fo}) = 1 + \frac{\mathrm{Po}\left(1 - \xi^2\right)}{2} + C_1\exp\left(-\frac{\pi^2\mathrm{Fo}}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi\xi}{2}\right). \tag{15}$$

Для определения C_1 составим невязку начального условия (2) и потребуем ортогональности невязки к координатной функции $\varphi_1(\xi)$

$$\int_0^1\left[1 + \frac{\mathrm{Po}\left(1 - \xi^2\right)}{2} + C_1\cos\left(\frac{\pi\xi}{2}\right)\right]\cos\left(\frac{\pi\xi}{2}\right)d\xi = 0. \tag{16}$$

Соотношение (16) относительно C_1 представляет алгебраическое уравнение. Определяя интегралы, находим $C_1 = -\dfrac{4\left(\pi^2 + 4\mathrm{Po}\right)}{\pi^3}$. С учетом C_1 соотношение (15) принимает вид

$$\Theta(\xi, \mathrm{Fo}) = 1 + \frac{\mathrm{Po}\left(1 - \xi^2\right)}{2} - \frac{4\left(\pi^2 + 4\mathrm{Po}\right)}{\pi^3}\times$$
$$\times\exp\left(-\frac{\pi^2\mathrm{Fo}}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi\xi}{2}\right). \tag{17}$$

Соотношение (17) точно удовлетворяет условиям (3), (4), уравнению (1) и приближенно – условию (2). Для повышения точности найдем решение во втором приближении. Подставляя (6) (ограничиваясь двумя членами ряда) в (5), (8), для $b_1(q)$ и $b_2(q)$ получим систему двух алгебраических уравнений. После их определения соотношение (6) будет иметь вид

$$\Theta(\xi,\mathrm{Fo}) = 1 + \frac{\mathrm{Po}(1-\xi^2)}{2} + \left[\frac{q'}{2\pi^2} + \frac{9}{8}\left(q - 1 - \frac{\mathrm{Po}}{2}\right)\right]\times$$
$$\times\cos\left(\frac{\pi\xi}{2}\right) + \left[\frac{1}{8}\left(1 + \frac{\mathrm{Po}}{2} - q\right) - \frac{q'}{2\pi^2}\right]\cos\left(\frac{3\pi\xi}{2}\right), \quad (18)$$

где $q' = \dfrac{dq}{d\mathrm{Fo}}$.

Подставляя (18) в интеграл теплового баланса (12), получаем

$$\frac{16q''}{\pi^4} + \frac{40q'}{\pi^2} + 9\left(q - 1 - \frac{\mathrm{Po}}{2}\right) = 0. \quad (19)$$

Интегрируя уравнение (19), находим

$$q(\mathrm{Fo}) = 1 + \frac{\mathrm{Po}}{2} + C_1\exp\left(-\frac{\pi^2\mathrm{Fo}}{4}\right) + C_2\exp\left(-\frac{9\pi^2}{4}\right), \quad (20)$$

где C_1, C_2 – постоянные интегрирования.

Соотношение (18) с учетом (20) принимает вид

$$\Theta(\xi,\mathrm{Fo}) = 1 + \frac{\mathrm{Po}}{2}(1-\xi^2) + C_1 e^{-\frac{\pi^2\mathrm{Fo}}{4}}\times$$
$$\times\cos\left(\frac{\pi\xi}{2}\right) + C_2 e^{-\frac{9\pi^2\mathrm{Fo}}{4}}\cos\left(\frac{3\pi\xi}{2}\right). \quad (21)$$

Постоянные C_1 и C_2 находятся из условия (2). Составим его невязку и потребуем ортогональности невязки к координатным функциям $\varphi_1(\xi)$ и $\varphi_2(\xi)$

$$\int_0^1\left[1 + \frac{\mathrm{Po}}{2}(1-\xi^2) + C_1\cos\left(\frac{\pi\xi}{2}\right) + C_2\cos\left(\frac{3\pi\xi}{2}\right)\right]\times$$
$$\times\cos\left(\frac{j\pi\xi}{2}\right)d\xi = 0 \quad (j = 1,\ 3). \quad (22)$$

Ввиду ортогональности косинусов, неизвестные C_1 и C_2 в системе алгебраических уравнений (22) разделяются (каждое уравнение содержит лишь одно неизвестное). Формулы для их определения будут

$$C_1 = -\frac{4(\pi^2 + 4\mathrm{Po})}{\pi^3};\quad C_2 = \frac{4(9\pi^2 + 4\mathrm{Po})}{27\pi^3}. \quad (23)$$

Соотношение (21) с учетом (23) принимает вид

$$\Theta(\xi,\mathrm{Fo}) = 1 + \frac{\mathrm{Po}}{2}(1-\xi^2) - \frac{4(\pi^2 + 4\mathrm{Po})}{\pi^3}e^{-\frac{\pi^2\mathrm{Fo}}{4}}\times$$
$$\times\cos\left(\frac{\pi\xi}{2}\right) + \frac{4(9\pi^2 + 4\mathrm{Po})}{27\pi^3}e^{-\frac{9\pi^2\mathrm{Fo}}{4}}\cos\left(\frac{3\pi\xi}{2}\right). \quad (24)$$

Соотношение (24) представляет решение задачи (1) – (4) во втором приближении. В третьем приближении используются условия (5), (8) и одно дополнительное условие, получаемое по формуле (10) (при $i = 1$). Решение задачи в третьем приближении имеет вид

$$\Theta(\xi,\mathrm{Fo}) = 1 + \frac{\mathrm{Po}}{2}(1-\xi^2) -$$
$$-\sum_{k=1}^{3} A_k\left(1 + \frac{\mathrm{Po}}{\mu_k^2}\right)e^{-\mu_k^2\mathrm{Fo}}\cos(\mu_k\xi), \quad (25)$$

где

$$A_k = \frac{4(-1)^{k+1}}{r\pi};\ \mu_k = \frac{r^2\pi^2}{4};\ r = 2k - 1. \quad (26)$$

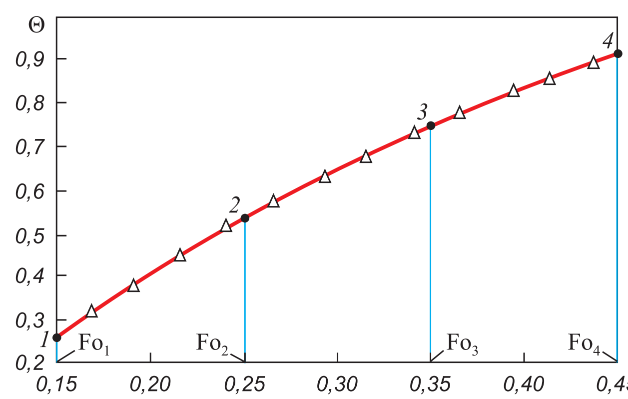
Анализируя соотношение (25), можно заметить, что формулы для коэффициентов A_k и собственных чисел μ_k совпадают с точными формулами для них. Исследования решений в последующих приближениях показали справедливость формул (26). Следовательно, при $n \to \infty$ формула (25) совпадает с классическим точным аналитическим решением краевой задачи (1) – (4) [19 – 22].

Допустим, что из эксперимента известно изменение температуры в точке $\xi = 0$ при Po = 1 в диапазоне числа Фурье $\mathrm{Fo}_1 \le \mathrm{Fo} \le \mathrm{Fo}_4$ (в качестве экспериментальных данных будем использовать результаты численного решения задачи (1) – (4)). Кривая изменения найденной таким путем температуры дана на рисунке. Аппроксимируем эту кривую следующей функцией

$$\Theta(0,\mathrm{Fo}) = b_1 + b_2\mathrm{Fo} + b_3\mathrm{Fo}^2 + b_4\mathrm{Fo}^3, \quad (27)$$

где b_1, b_2, b_3, b_4 – неизвестные коэффициенты.

Записывая соотношение (27) для точек *1*, *2*, *3*, *4* кривой и считая, что температуры в этих точках наблюдаются соответственно для чисел Фурье, равных $\mathrm{Fo}_1 = 0{,}15$; $\mathrm{Fo}_2 = 0{,}25$; $\mathrm{Fo}_3 = 0{,}35$; $\mathrm{Fo}_4 = 0{,}45$, для определения неизвестных коэффициентов b_1, b_2, b_3, b_4 будем иметь систему четырех алгебраических уравнений, в которой значения полученных из расчета по методу конечных разностей температур в точках *1*, *2*, *3*, *4* были



Результаты аппроксимации численного решения по формуле (27): — – численное решение; △ – аппроксимирующая кривая (по формуле (28))

Results of approximation of the numerical decision by the formula (27): — – numerical decision; △ – approximating curve (by the formula (28)) соответственно равны $\Theta(\mathrm{Fo}_1) = 0{,}264$; $\Theta(\mathrm{Fo}_2) = 0{,}535$; $\Theta(\mathrm{Fo}_3) = 0{,}746$; $\Theta(\mathrm{Fo}_4) = 0{,}911$. Из решения этой системы находим $b_1 = -0{,}286$; $b_2 = 4{,}324$; $b_3 = -4{,}75$; $b_4 = 2{,}333$.

Соотношение (27) с учетом найденных b_k ($k = 1, 2, 3, 4$) будет

$$\Theta(0, \mathrm{Fo}) = -0{,}286 + 4{,}324\,\mathrm{Fo} - 4{,}75\,\mathrm{Fo}^2 + 2{,}333\,\mathrm{Fo}^3. \quad (28)$$

Результаты расчетов по формуле (27), приведенные на рисунке, позволяют сделать заключение об их практическом совпадении с результатами решения задачи (1) – (4) методом конечных разностей.

Из решения обратной задачи с использованием соотношения (17) можно идентифицировать (восстановить) число Ро. Подставляя (28) в левую часть решения (17), положив $\xi = 0$, и определяя интеграл от полученного соотношения в пределах $\mathrm{Fo}_1 \le \mathrm{Fo} \le \mathrm{Fo}_4$, получаем

$$\int_{\mathrm{Fo}_1}^{\mathrm{Fo}_4} \left(-0{,}286 + 4{,}324\mathrm{Fo} - 4{,}75\mathrm{Fo}^2 + 2{,}333\mathrm{Fo}^3\right) d\mathrm{Fo} =$$

$$= \int_{\mathrm{Fo}_1}^{\mathrm{Fo}_4} 1 + \frac{\mathrm{Po}}{2}\left(1 - \xi^2\right) - \frac{4\left(\pi^2 + 4\mathrm{Po}\right)}{\pi^3} \exp\left(-\frac{\pi^2 \mathrm{Fo}}{4}\right) \times$$

$$\times \cos\left(\frac{\pi\xi}{2}\right). \quad (29)$$

Определяя интегралы в уравнении (29), относительного искомого числа Ро будем иметь алгебраическое уравнение, из решения которого находим Ро = 0,999. Точное значение числа Ро (при котором выполнялся численный расчет) было Ро = 1,0. Следовательно, отклонение найденного из уравнения (29) числа Ро от его точного значения составляет 0,1 %.

Путем решения обратных задач из соотношения (17) можно найти величину мощности источника теплоты, возникающего в кристаллизующемся сплаве в процессе фазового перехода. Известно, что во многих сплавах процесс кристаллизации протекает ступенчато во времени, причем, каждая ступень включает определенный температурно-временной диапазон. Имея экспериментальные данные по температуре в процессе кристаллизации, путем решения обратной задачи теплопроводности можно оценить мощность выделившегося источника теплоты на каждой отдельно взятой ступеньке.

Выводы. Используя дополнительные граничные условия и дополнительную искомую функцию, получено точное аналитическое решение нестационарной задачи теплопроводности для полубесконечной пластины с источником теплоты. Введение дополнительной искомой функции позволяет свести решение уравнения в частных производных к интегрированию обыкновенного дифференциального уравнения.

Отсутствие необходимости интегрирования уравнения в частных производных, заменив его выполнением интеграла теплового баланса, позволяет использовать данный метод для решения многих сложных краевых задач (нелинейных, с переменными физическими свойствами и др.), решение которых с помощью классических аналитических методов затруднительно.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Кудинов В.А., Кудинов И.В. Аналитические решения параболических и гиперболических уравнений тепломассопереноса. – М.: Инфра-М, 2013. – 391 с.
2. Лыков А.В. Методы решения нелинейных уравнений нестационарной теплопроводности // Энергетика и транспорт. 1970. № 5. С. 109 – 150.
3. Гудмен Т. Применение интегральных методов в нелинейных задачах нестационарного теплообмена // Проблемы теплообмена: Сб. науч. тр. – М.: Атомиздат, 1967. С. 41 – 53.
4. Био М. Вариационные принципы в теории теплообмена. – М.: Энергия, 1975. – 209 с.
5. Вейник А.И. Приближенный расчет процессов теплопроводности. – М.-Л.: Госэнергоиздат, 1959. – 184 с.
6. Швец М.Е. О приближенном решении некоторых задач гидродинамики пограничного слоя // Прикладная математика и механика. 1949. Т. 13. № 3. С. 257 – 266.
7. Тимошпольский В.И., Постольник Ю.С., Андрианов Д.Н. Теоретические основы теплофизики и термомеханики в металлургии. – Минск: Белорусская навука, 2005. – 560 с.
8. Глазунов Ю.Т. Вариационные методы. – М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2006. – 470 с.
9. Беляев Н.М., Рядно А.А. Методы нестационарной теплопроводности. – М.: Высшая школа, 1978. – 328 с.
10. Кудинов В.А., Стефанюк Е.В. Аналитический метод решения задач теплопроводности на основе введения фронта температурного возмущения и дополнительных граничных условий // Инженерно-физический журнал. 2009. Т. 82. № 3. С. 540 – 558.
11. Стефанюк Е.В., Кудинов В.А. Получение приближенных аналитических решений при рассогласовании начальных и граничных условий в задачах теории теплопроводности // Изв. вуз. Математика. 2010. № 4. С. 63 – 71.
12. Кудинов В.А., Кудинов И.В., Скворцова М.П. Обобщенные функции и дополнительные граничные условия в задачах теплопроводности для многослойных тел // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2015. Т. 55. № 4. С. 129 – 140.
13. Формалев В.Ф., Кузнецова Е.Л., Рабинский Л.Н. Локализация тепловых возмущений в нелинейных анизотропных средах с поглощением // Теплофизика высоких температур. 2015. № 4. С. 579 – 584.
14. Формалев В.Ф., Колесник С.А., Кузнецова Е.Л., Рабинский Л.Н. Тепломассоперенос в теплозащитных композиционных материалах в условиях высокотемпературного нагружения // Теплофизика высоких температур. 2016. № 3. С. 415 – 422.
15. Канторович Л.В. Об одном методе приближенного решения дифференциальных уравнений в частных производных // Докл. АН СССР. 1934. Т. 2. № 9. С. 532 – 534.
16. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. – М.: Гостеориздат, 1952. – 695 с.
17. Федоров Ф.М. Граничный метод решения прикладных задач математической физики. – Новосибирск: Наука, 2000. – 220 с.
18. Федоров Ф.М. Граничный метод решения прикладных задач математической физики и его приложения в геомеханике: Автореф. дис. … д-ра. физ.-мат. наук. – Новосибирск: Ин-т вычисл. матем. и матем. физики СО РАН, 2002.
19. Кудряшов Л.И., Меньших Н.Л. Приближенные решения нелинейных задач теплопроводности. – М.: Машиностроение, 1979. – 232 с.

20. Цой П.В. Системные методы расчета краевых задач тепломассопереноса. – М.: Изд-во МЭИ, 2005. – 568 с.
21. Карташов Э.М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. – М.: Высшая школа, 2001. – 550 с.
22. Лыков А.В. Теория теплопроводности. – М.: Высшая школа, 1967. – 600 с.

Поступила 18 июля 2016 г.

Izvestiya VUZov. Chernaya Metallurgiya = Izvestiya. Ferrous Metallurgy. 2017. Vol. 60. No. 11, pp. 877–882.

METHOD OF OBTAINING EXACT ANALYTICAL SOLUTIONS OF TASKS OF HEAT CONDUCTIVITY WITH WARMTH SOURCES

I.V. Kudinov, E.V. Stefanyuk, M.P. Skvortsova, G.N. Maksimenko

Samara State Technical University, Samara, Russia

Abstract. By application of additional required function and additional boundary conditions to the integral method of heat balance, the exact analytical decision of the heat conductivity task for a semi-infinite plate was received in case of the symmetric boundary conditions of the first kind with uniformly distributed warmth source. Introduction of the additional required function representing change of temperature in time in plate center is based on the heat conduction of the infinite speed of warmth distribution described by the parabolic equation according to which temperature in any point of a plate begins to change right after application of a boundary condition of the first kind on its surface. Additional boundary conditions are so that their execution, by the required decision, was equivalent to execution of the equation of a boundary value problem in boundary points. In case of their finding the differential equation and the given boundary conditions is used. The general formulas given in article allow to find additional boundary conditions for any number of approaches. It is shown that execution of the equation in boundary points leads to its execution also in the area with an accuracy depending on number of approaches (number of additional boundary conditions). Use of an integral method of a heat balance allows to consolidate the solution of a partial equation to integration of the ordinary equation of rather additional required function. Absence of need of integration of an input equation on space variable allows to use this method in case of the solution of many difficult boundary value problems (non-linear, with float factors, etc.) for which it is difficult to receive the decision by means of classical exact analytical methods. Using the found analytical solution, and also results of temperature change in time in one of plate points received by method of finite differences, the solution of the reverse task of heat conductivity regenerated the power of an internal source of warmth. Results of operation can be used for identification of the sources of warmth arising in case of influence of electromagnetic waves, high-frequency oscillations and so forth, and also in case of melting or crystallization of the alloys which are followed by origin of internal sources of warmth.

Keywords: non-stationary heat conductivity, semi-infinite plate, warmth source, infinite speed of warmth distribution, integrated method of thermal balance, exact analytical decision, additional required function, additional boundary conditions.

DOI: 10.17073/0368-0797-2017-11-877-882

REFERENCES

1. Kudinov V.A., Kudinov I.V. *Analiticheskie resheniya parabolicheskikh i giperbolicheskikh uravnenii teplomassoperenosa* [Analytical solutions of parabolic and hyperbolic equations of a heatmass transfer]. Moscow: Infra-M, 2013, 391 p. (In Russ).
2. Lykov A.V. Methods of solution of nonlinear equations of non-stationary heat conductivity. *Energetika i transport*. 1970, no. 5, pp. 109–150. (In Russ).
3. Gudmen T. Application of integrated methods in nonlinear problems of non-stationary heat exchange. In: *Problemy teploobmena. Sb. nauch. tr.* [Problems of heat exchange. Coll. of Sci. Papers]. Moscow: Atomizdat, 1967, pp. 41–53. (In Russ).
4. Biot Maurice A. *Variational principles in heat transfer*. Clarendon Press, 1970. (Russ.ed.: Biot M. *Variatsionnye printsipy v teorii teploobmena*. Moscow: Energiya, 1975, 209 p.).
5. Veinik A.I. *Priblizhennyi raschet protsessov teploprovodnosti* [Approximate calculation of processes of heat conductivity]. Moscow-Leningrad: Gosenergoizdat, 1959, 184 p. (In Russ).
6. Shvets M.E. On the approximate solution of some problems of hydrodynamics of an interface. *Prikladnaya matematika i mekhanika*. 1949, vol. 13, no. 3, pp. 257–266. (In Russ).
7. Timoshpol'skii V.I., Postol'nik Yu.S., Andrianov D.N. *Teoreticheskie osnovy teplofiziki i termomekhaniki v metallurgii* [Theoretical fundamentals of thermophysics and thermomechanics in metallurgy]. Minsk: Belorusskaya navuka, 2005, 560 p. (In Russ).
8. Glazunov Yu.T. *Variatsionnye metody* [Variation methods]. Moscow-Izhevsk: NITs "Regulyarnaya i khaoticheskaya dinamika", 2006, 470 p. (In Russ).
9. Belyaev N.M., Ryadno A.A. *Metody nestatsionarnoi teploprovodnosti* [Methods of non-stationary heat conductivity]. Moscow: Vysshaya shkola, 1978, 328 p. (In Russ).
10. Kudinov V.A., Stefanyuk E.V. Analytical solution method for heat conduction problems based on the introduction of the temperature perturbation front and additional boundary conditions. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 2009, vol. 82, Issue 3, pp. 537–555.
11. Stefanyuk E.V., Kudinov V.A. Approximate analytic solution of heat conduction problems with a mismatch between initial and boundary conditions. *Russian Mathematics*. 2010, vol. 54, Issue 4, pp. 55–61.
12. Kudinov V.A., Kudinov I.V., Skvortsova M.P. Generalized functions and additional boundary conditions in heat conduction problems for multilayered bodies. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2015, vol. 55, no. 4, pp. 666–676.
13. Formalev V.F., Kuznetsova E.L., Rabinskiy L.N. Localization of thermal disturbances in nonlinear anisotropic media with absorption. *High Temperature*. 2015, vol. 53, Issue 4, pp. 548–553.
14. Formalev V.F., Kolesnik S.A., Kuznetsova E.L., Rabinskiy L.N. Heat and mass transfer in thermal protection composite materials upon high temperature loading. *High Temperature*. 2016, vol. 54, Issue 3, pp. 390–396.
15. Kantorovich L.V. One method of approximate solution of the differential equations in private derivatives. *Dokl. AN SSSR*. 1934, vol. 2, no. 9, pp. 532–534. (In Russ).
16. Kantorovich L.V., Krylov V.I. *Priblizhennye metody vysshego analiza* [Approximate methods of the highest analysis]. Moscow: Gosteorizdat, 1952, 695 p. (In Russ).
17. Fedorov F.M. *Granichnyi metod resheniya prikladnykh zadach matematicheskoi fiziki*. [Boundary method of decision of application-oriented tasks of mathematical physics]. Novosibirsk: Nauka, 2000, 220 p. (In Russ).
18. Fedorov F.M. *Granichnyi metod resheniya prikladnykh zadach matematicheskoi fiziki i ego prilozheniya v geomekhanik: avtoref. dis. dokt. fiz.-mat. nauk* [Boundary method of the decision of application-oriented tasks of mathematical physics and its application in geomechanics: Extended Abstract of the Dr. Sci. (Phys.–Math.) Diss.]. Novosibirsk: In-t vychisl. matem. i matem. fiziki SO RAN, 2002. (In Russ).

19. Kudryashov L.I., Men'shíkh N.L. *Priblizhennye resheniya nelineinykh zadach teploprovodnosti* [Approximate solutions of nonlinear problems of heat conductivity]. Moscow: Mashinostroenie, 1979, 232 p. (In Russ).

20. Tsoi P.V. *Sistemnye metody rascheta kraevykh zadach teplomassoperenosa* [System methods of calculation of regional problems of heatmass transfer]. Moscow: MEI, 2005, 568 p. (In Russ).

21. Kartashov E.M. *Analiticheskie metody v teorii teploprovodnosti tverdykh tel* [Analytical methods in the theory of heat conductivity of solid bodies]. Moscow: Vysshaya shkola, 2001, 550 p. (In Russ).

22. Lykov A.V. *Teoriya teploprovodnosti* [Theory of heat conductivity]. Moscow: Vysshaya shkola, 1967, 600 p. (In Russ).

Acknowledgements. The work was financially supported by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation in the framework of the basic part of the state assignment of the FSBUU of the "SamSTU" (project No. 1.5551.2017/BCh).

Information about the authors:

I.V. Kudinov, *Cand. Sci. (Eng.), Assist. Professor of the Chair "Theoretical Foundations of Thermal Engineering and Fluid Mechanics"* (totig@yandex.ru)

E.V. Stefanyuk, *Dr. Sci. (Eng.), Professor of the Chair "Theoretical Foundations of Thermal Engineering and Fluid Mechanics"*

M.P. Skvortsova, *Postgraduate of the Chair "Theoretical Foundations of Thermal Engineering and Fluid Mechanics"*

G.N. Maksimenko, *Postgraduate of the Chair "Theoretical Foundations of Thermal Engineering and Fluid Mechanics"*

Received July 18, 2016