

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛОВЫХ ПРОЦЕССОВ ПРИ ОБРАБОТКЕ ПОВЕРХНОСТИ МЕТАЛЛОИЗДЕЛИЙ ВЫСОКОКОНЦЕНТРИРОВАННЫМИ ПОТОКАМИ ЭНЕРГИИ

Базайкин В.И., д.т.н., профессор кафедры прикладной математики и информатики (bazaykin.vi@yandex.ru)

Базайкина О.Л., к.т.н., доцент кафедры прикладной математики и информатики (bazayolga@yandex.ru)

Осколкова Т.Н., к.т.н., доцент кафедры обработки металлов давлением и металловедения ЕВРАЗ ЗСМК (oskolкова@kuz.ru)

Темлянецев М.В., д.т.н., профессор, проректор по научной работе и инновациям, профессор кафедры теплоэнергетики и экологии (Ucheb.otdel@sibsiu.ru)

Сибирский государственный индустриальный университет
(654007, Россия, Кемеровская обл., Новокузнецк, ул. Кирова, 42)

Аннотация. Поставлены и решены задачи моделирования термического эффекта воздействия энергетического импульса на поверхность пластины из сплава ВК10(КС). В качестве модельных выбраны задачи для однородных уравнений параболической и гиперболической теплопроводностей, волнового уравнения в цилиндрическом теле конечных размеров с граничными условиями III рода. Действие энергетического импульса от внешнего источника моделируется внезапным возникновением начальной высокой температуры на одном из торцов цилиндра, которая распределяется по его телу по законам, выражаемым различными уравнениями теплопроводности. Получены приближения температурных полей в виде отрезка функционального ряда из собственных функций задач, определены градиенты полей. Одновременное наличие в уравнении теплопроводности частных производных по времени первого и второго порядков (гиперболическое уравнение) и постановка задачи для него с граничными условиями III рода и начальным условием на торце цилиндра обеспечивают две моды решения задачи, обе диффузионного типа. Для значения времени релаксации теплового потока 10^{-11} с практически полное охлаждение цилиндрического образца (карбида вольфрама) по первой моде составляет минуты, по второй 10^{-10} с. Можно заключить, что моды решения задачи для уравнения гиперболической теплопроводности не соответствуют реальной картине распространения тепла. Однако линейная комбинация этих мод как решение задачи сохраняет возможность получить диффузионную динамику, адекватную реальному процессу. Градиенты температурного поля в решениях задач для уравнения параболической теплопроводности и волнового уравнения находятся в одном порядке значений. Температурное поле бегущей тепловой волны для нескольких первых ее отражений в экспериментальных образцах следует принимать в расчет при оценке фазовых превращений и температурных напряжений. Результаты теоретического анализа сопоставлены с изменениями микроструктуры приповерхностного слоя пластины из сплава ВК10(КС), подвергнутой электро-взрывному нагружению плазмой титановой фольги.

Ключевые слова: энергетический импульс, электровзрывное нагружение, круглая пластина, уравнение теплопроводности, релаксация теплового потока, собственные числа задачи, граничные условия III рода, динамика температурного поля, приповерхностный слой, термические напряжения, карбид вольфрама, микроструктура.

DOI: 10.17073/0368-0797-2017-5-398-409

Одной из основных тенденций дифференцированно-го упрочнения металлических изделий является применение электронно-лучевой, лазерной, электровзрывной обработок их поверхностей [1, 2]. Возникающие уровни температурных полей могут инициировать фазовые переходы в структуре материала изделия, градиенты температурных полей могут обуславливать появление температурных напряжений. Выраженная динамика температурных полей не исключает возникновения таких термических эффектов, как проплавление поверхностного слоя и образование в нем трещин.

Известны работы, в которых моделируется влияние формы энергетического импульса на физиче-

ские процессы в теле изделия [3, 4]. Однако при всем разнообразии энергетических методов поверхностного упрочнения определяющую роль для оценки возникающих полей температуры играют механизмы передачи тепла от поверхности в тело изделия. Самая распространенная и адекватная модель механизма, работающего в твердом теле, параболическое уравнение теплопроводности, когда в каждый момент времени скорость изменения температуры в данной материальной точке линейно зависит только от значения градиента поля температуры в этой точке и в этот момент.

Если в модель механизма теплопередачи ввести положение о конечной скорости распространения теп-

лового потока, то в линейной зависимости от дивергенции градиента поля температур будет находиться сумма первых и вторых производных температуры по времени, что допускает волновой характер теплопередачи. Это уже гиперболическая модель теплопроводности [5 – 7], формально описывающая одновременное сосуществование двух механизмов теплопередачи – с бесконечной и конечной скоростями.

В работах [8 – 10] для быстропротекающих процессов предложена модель теплопроводности с двумя температурами: термодинамической и температурой проводимости. В работах [11 – 13] рассмотрены модели с классическим законом Фурье, в котором переменная времени имеет различные времена запаздывания для плотности теплового потока и градиента температур.

В настоящей работе рассмотрены варианты однородных уравнений теплопроводности, поставлены и решены задачи для них с заданием начальных температур и граничных условий III рода. В этих задачах действие внешнего энергоисточника эквивалентно заданию начального условия для температуры на одном из торцов кругового цилиндра конечных размеров, уровень которой можно оценить по энергии внешнего воздействия. В любом случае динамика температурного поля в теле цилиндра, инициируемого внешним воздействием, определяется уже механизмом теплопроводности материала цилиндра и его размерами и мало зависит от длительности импульса энергетической обработки при неизменном значении его энергии.

Переменные температурные поля в представленных моделях обсуждены как факторы влияния уровней и градиента температурного поля, скорости его изменения на микроструктуру поверхностного слоя изделия [14, 15].

Параболическая модель

Сформулируем математическую задачу, моделирующую нагретие образца – кругового цилиндра. В цилиндрической системе координат r, φ, z (r – радиальная, φ – окружная, z – осевая координаты) осесимметричное однородное уравнение теплопроводности для температуры $t(\tau, r, z)$ имеет вид [16]:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \left(\frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial r} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right), \quad (1)$$

где переменная τ – время, a – коэффициент теплопроводности материала образца.

Граничное условие на цилиндрической поверхности образца радиусом R и толщиной H задается в форме теплообмена по закону Ньютона с окружающей средой, имеющей температуру t_c [5]:

$$\lambda \frac{\partial t}{\partial r} \Big|_{r=R} = -\alpha(t - t_c), \quad (2)$$

где λ – коэффициент теплопроводности материала образца; α – коэффициент теплообмена между поверхностью образца и окружающей средой.

Такой же теплообмен задан на торцевых плоскостях образца:

$$\lambda \frac{\partial t}{\partial z} \Big|_{z=H} = -\alpha(t - t_c), \quad \lambda \frac{\partial t}{\partial z} \Big|_{z=0} = \alpha(t - t_c). \quad (3)$$

Начальное условие задает температуру на плоскости $z = 0$ в начальный момент времени:

$$t(0, r, 0) = t_0. \quad (4)$$

Уравнение (1) и условия (2) – (4) составляют задачу для этого уравнения.

Введем безразмерные переменные $\rho = \frac{r}{\sqrt{RH}}, \zeta = \frac{z}{\sqrt{RH}}, s = \frac{a}{RH} \tau, 0 \leq \rho \leq \sqrt{\frac{R}{H}}, 0 \leq \zeta \leq \sqrt{\frac{H}{R}}, s \geq 0, s \geq 0$, безразмерную постоянную $\beta = \frac{\alpha}{\lambda} \sqrt{RH}$ и размерную переменную $\theta = (t - t_c)$.

С позиций классической теории теплопроводности [5] переменная s является аналогом числа Фурье (Fo), постоянная β играет роль числа Био (Bi).

В новых переменных поставленная задача (1) – (4) формулируется следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial s} &= \frac{\partial^2 \theta}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \theta}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \zeta^2}; \\ \left(\frac{\partial \theta}{\partial \rho} + \beta \theta \right) \Big|_{\rho=\sqrt{\frac{R}{H}}} &= 0; \quad \left(\frac{\partial \theta}{\partial \zeta} + \beta \theta \right) \Big|_{\zeta=\sqrt{\frac{H}{R}}} = 0; \\ \left(\frac{\partial \theta}{\partial \zeta} - \beta \theta \right) \Big|_{\zeta=0} &= 0; \quad \theta(s, \rho, \zeta) \Big|_{s=0} = \theta_0. \end{aligned} \quad (5)$$

Для решения задачи применим метод разделения переменных: $\theta(s, \rho, \zeta) = T(s)W(\rho)Z(\zeta)$. Подстановка этого разложения в уравнение (5) приводит к трем обыкновенным дифференциальным уравнениям:

$$\begin{aligned} \frac{W''(\rho)}{W(\rho)} + \frac{1}{\rho} \frac{W'(\rho)}{W(\rho)} &= -\nu^2; \quad \frac{Z''(\zeta)}{Z(\zeta)} = -\chi^2; \\ \frac{T'(s)}{T(s)} &= -\nu^2 - \chi^2, \quad \nu = \text{const}, \quad \chi = \text{const}. \end{aligned}$$

Решением уравнения

$$W'' + \frac{1}{\rho} W' + \nu^2 W = 0, \quad (6)$$

не имеющим особенностей в точке $\rho = 0$, является функция Бесселя 1-го рода нулевого порядка [16]:

$$W(\rho) = AJ_0(\nu\rho), \quad A = \text{const}.$$

Граничное условие для функции θ при $\rho = \sqrt{\frac{R}{H}}$ приводит к алгебраическому уравнению

$$v\sqrt{\frac{R}{H}}J_1\left(v\sqrt{\frac{R}{H}}\right) - \sqrt{\frac{R}{H}}\beta J_0\left(v\sqrt{\frac{R}{H}}\right) = 0$$

или

$$\mu J_1(\mu) - \sqrt{\frac{R}{H}}\beta J_0(\mu) = 0, \quad (7)$$

где $\mu = v\sqrt{\frac{R}{H}}$.

По корням μ_i уравнения (7) находим бесконечное семейство линейно независимых и ортогональных функций $J_0(v_i\rho)$ [5]; $J_1(v_i\rho)$ – функция Бесселя 1-го рода первого порядка. Общее решение уравнения (6) представляется разложением по базису функций $W_i(\rho) = J_0(v_i\rho)$:

$$W(\rho) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i W_i(\rho) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i J_0(v_i\rho), \quad (8)$$

коэффициенты A_i которого находятся из начального условия

$$\theta(s, \rho, \zeta) \Big|_{s=0} \Big|_{\zeta=0} = T(0)W(\rho)Z(0) = 1W(\rho)1 = \theta_0,$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} A_i J_0(v_i\rho) = \theta_0;$$

$$A_i = \frac{2}{\left(1 + \frac{\beta^2}{\mu_i^2}\right) J_0^2(\mu_i)} \int_0^{\sqrt{\frac{R}{H}}} \theta_0 \rho J_0(\mu_i \rho) d\rho \approx \frac{2\theta_0 J_1(\mu_i)}{\mu_i \left(1 + \frac{\beta^2}{\mu_i^2}\right) J_0^2(\mu_i)}.$$

Требование $T(0) = 1$ и $Z(0) = 1$ для функций $T(s)$ и $Z(\zeta)$ обеспечивает выполнение начального условия задачи.

Решением уравнения $Z'' + \chi^2 Z = 0$ является функция $Z(\zeta) = B \cos(\chi\zeta) + C \sin(\chi\zeta)$ с неопределенными коэффициентами B и C . Выполнение граничных условий $\left(\frac{\partial\theta}{\partial\zeta} + \beta\theta\right) \Big|_{\zeta=\sqrt{\frac{H}{R}}} = 0$ и $\left(\frac{\partial\theta}{\partial\zeta} - \beta\theta\right) \Big|_{\zeta=0} = 0$ возможно, если

постоянная $\sqrt{\frac{H}{R}}\chi = \omega$ принимает значения корней ω_j уравнения

$$\text{ctg}(\omega) = \frac{1}{2} \left(\frac{\omega}{\sqrt{\frac{H}{R}}\beta} - \sqrt{\frac{H}{R}}\beta \right). \quad (9)$$

Бесконечное семейство собственных чисел $\chi_j = \sqrt{\frac{R}{H}}\omega_j$ позволяет получить семейство линейно независимых частных решений уравнения $Z'' + \chi^2 Z = 0$:

$$Z_j(\zeta) = \cos \chi_j \zeta + \frac{\beta}{\chi_j} \sin \chi_j \zeta.$$

Тогда общее решение рассматриваемого уравнения представляется линейной комбинацией функций $Z_j(\zeta)$:

$$Z(\zeta) = \sum_{j=1}^{\infty} D_j \left[\cos \chi_j \zeta + \frac{\beta}{\chi_j} \sin \chi_j \zeta \right].$$

Чтобы выполнялось требование $Z(0) = 1$, необходимо выполнение условия на сумму числового ряда: $\sum_{j=1}^{\infty} D_j = 1$. Это условие оставляет свободу конструкции членов ряда, выбираем $D_j = (1/2)^j$.

Уравнение для функции $T(s)$ переменной безразмерного времени $s: T' + (v_i^2 + \chi_j^2)T = 0$ подчинено первым двум дифференциальным уравнениям, поэтому его частное решение $T_{ij}(s) = \exp[-(v_i^2 + \chi_j^2)s]$ должно быть встроено в общие решения указанных уравнений. В результате получаем решение задачи (5):

$$\theta(s, \rho, \zeta) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i \exp(-v_i^2 s) J_0(v_i \rho) \right) \times \left[\sum_{j=1}^{\infty} D_j \exp(-\chi_j^2 s) \left(\cos \chi_j \zeta + \frac{\beta}{\chi_j} \sin \chi_j \zeta \right) \right]. \quad (10)$$

С учетом слабой зависимости температурного поля от радиальной координаты градиент температурного поля можно оценить по его главной составляющей $\frac{\partial\theta}{\partial\zeta}(s, \zeta)$; нетрудно найти скорость изменения температурного поля $\frac{\partial\theta}{\partial s}(s, \zeta)$ в каждой точке тела цилиндра.

Рассмотрим пример численной реализации решения при следующих данных. Образец, выполненный из сплава ВК10 (КС), содержащий 90 % WC и 10 % Co, имеет форму кругового цилиндра с радиусом $R = 0,012$ м и высотой $H = 0,010$ м. Плотность массы сплава $\gamma = 16\,000$ кг/м³, удельная теплоемкость c сплава в интервале температур 2000 – 2800 °C равна 186 Дж/(кг·K); коэффициент теплопроводности сплава $\lambda = 150$ Вт/(м·K); коэффициент теплообмена $\alpha = 200$ Вт/(м²·K) в указанном интервале температур. Зададим начальное условие $\theta_0 = 2870$ °C.

Вычислим следующие параметры: коэффициент температуропроводности $a = \frac{\lambda}{c\gamma} = 5 \cdot 10^{-5}$ м²/с, $\beta = \frac{\alpha}{\lambda} \sqrt{RH} = 0,014605$. Приведем связь безразмерных и исходных аргументов функций: $\tau = 2,398s$, $r = 1,095 \cdot 10^{-2}\rho$, $z = 1,095 \cdot 10^{-2}\zeta$. Начальное условие: $\theta_0 = 2870$ °C. С использованием системы Maple [17] вычислены собственные числа $v_i, \chi_j, i, j = 1, \dots, 25$.

На рис. 1 представлены распределения температуры $\theta(s, \rho, \zeta)$ по телу образца в два момента времени, на рис. 2 показаны оценки градиента $\frac{\partial \theta}{\partial \zeta}(s, \zeta)$ в различные моменты времени. Самое большое абсолютное значение градиента наблюдается в первые десятки микросекунд на глубине 1,4 мм (в пересчете от параметра ζ к размерной координате z).

Наибольшее абсолютное значение градиента температуры равно 0,55 К/мкм. В начальный момент нагружения наибольшая абсолютная величина скорости изменения температуры наблюдается на поверхности образца ($z = 0$) и достигает значения 0,2 К/мкс. Значения обоих параметров высоки и свидетельствуют о том, что критические уровни интенсивности напряжений могут достигаться на некоторой глубине между нагружаемой поверхностью и плоскостью в теле образца с относительной координатой $z/H = 0,14$.

Как результат экспериментов, на рис. 3 показана микроструктура приповерхностного слоя после электровзрывного нагружения образца из сплава ВК10(КС) с радиусом $R = 0,012$ м и высотой $H = 0,010$ м. Плоскость пластины нагружалась плазмой от разряда на титановую фольгу электроэнергии, накопленной батареей высоковольтных конденсаторов. Разрядное устройство обеспечивало плотность мощности нагружения $q = 6,2$ ГВт/м² в импульсе длительностью 110 мкс [18].

На рис. 3 различаются три слоя. Согласно данным рентгенографического исследования, слой 1 толщиной примерно 4 мкм состоит из затвердевшего расплава карбида титана с включением небольших количеств карбидов вольфрама WC и W₂C. Произошло легирова-

ние пластины титаном из фольги с образованием карбида титана и его кратковременное плавление.

Слой 2 имеет мелкодисперсную структуру. В силу диффузии углерода в слой 1 для образования карбида титана в условиях обеднения слоя 2 углеродом в нем происходит преобразование части карбида WC в карбид W₂C и одновременно укрупнение части зерен WC до размеров 3 мкм. Слой 2 остается твердым во все время обработки. Здесь наиболее сильно выражен эффект упрочнения зерен карбида вольфрама.

Изменения в слое 3 затрагивают только легкоплавкую кобальтовую связку и сводятся к насыщению кобальта вольфрамом, титаном и углеродом. Переход слоя 3 в материал основы пластины плавный, микротрещины не отмечаются.

Фазовые и структурные изменения как результат электровзрывной обработки видимы до глубины примерно 30 мкм. Однако, как свидетельствует анализ модели, максимум градиента температуры располагается на глубине во много раз большей. Можно предположить, что учет конечности скорости теплопереноса позволит объяснить это несоответствие.

Гиперболическая модель

В цилиндрических пространственных координатах в случае осевой симметрии процесса распространения теплового потока вдоль оси Z гиперболическое уравнение теплопроводности имеет вид:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} + \tau_r \frac{\partial^2 t}{\partial \tau^2} = a \left(\frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial r} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right), \quad (11)$$

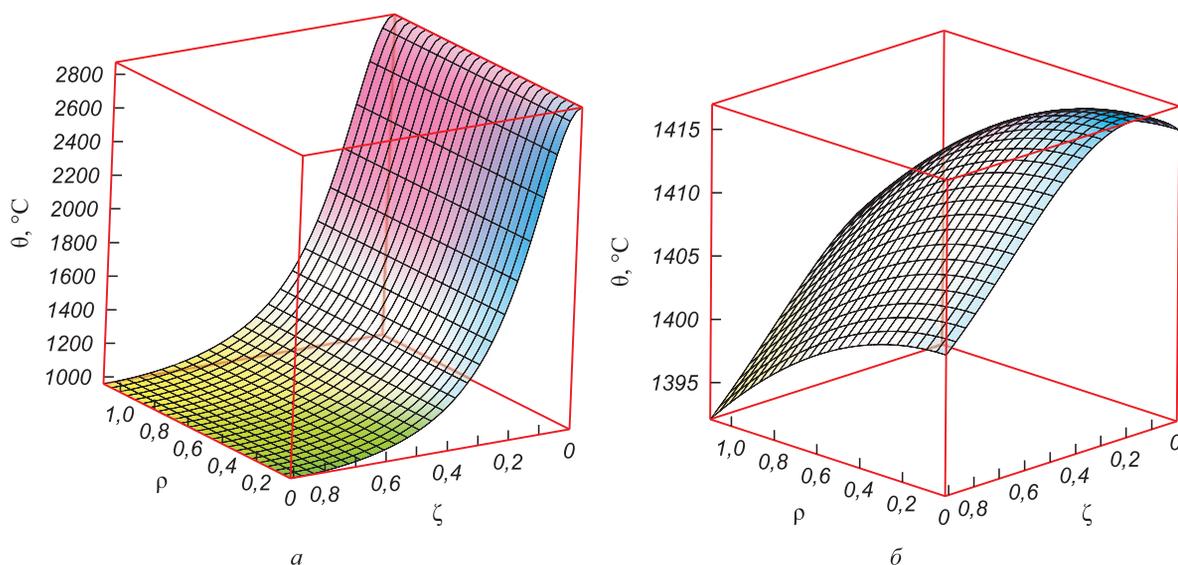


Рис. 1. Температурные поля в теле образца в различные моменты времени:
 а – $\tau = 50$ мкс; б – $\tau = 1,0$ с

Fig. 1. Temperature fields in a body of the sample at various moments of time:
 а – $\tau = 50$ mks; б – $\tau = 1.0$ s

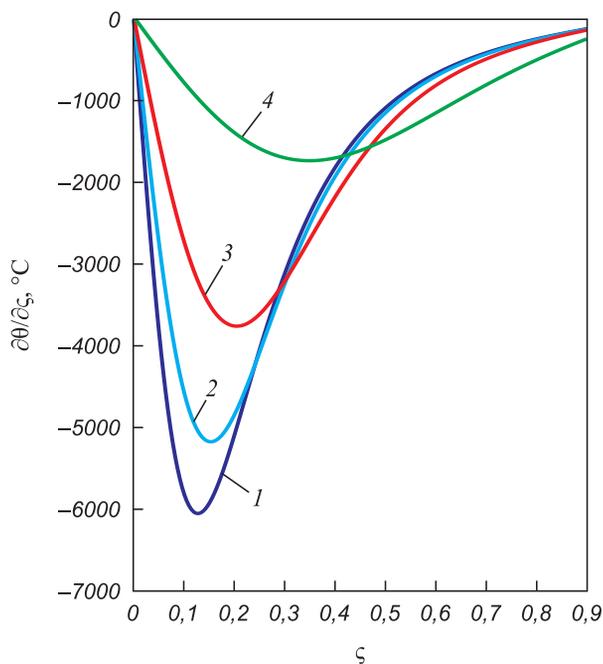


Рис. 2. Распределения основной составляющей градиента температурных полей вдоль оси образца в различные моменты времени: 1 – τ = 50 мкс; 2 – τ = 5 мс; 3 – τ = 20 мс; 4 – τ = 100 мс

Fig. 2. Distributions of the basic component of temperature fields gradient along an axis of the sample at various moments of time: 1 – τ = 50 mks; 2 – τ = 5 ms; 3 – τ = 20 ms; 4 – τ = 100 ms

где τ_r – время релаксации теплового потока, постоянная характеристика материала изделия, ее существование определяет конечность скорости распространения тепла $J = \sqrt{\frac{a}{\tau_r}}$.

К безразмерным переменным и постоянным добавим безразмерное время релаксации теплового потока $q = \frac{a\tau_r}{RH}$. Тогда безразмерное гиперболическое уравнение теплопроводности имеет вид:

$$\frac{\partial \theta}{\partial s} + q \frac{\partial^2 \theta}{\partial s^2} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \theta}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \zeta^2}. \quad (12)$$

Оставим без изменения начальные и граничные условия задачи (5). Решение уравнения (12) представим в виде

$$\theta(s, \rho, \zeta) = H(s, \zeta)W(\rho).$$

Подстановка этого разложения в дифференциальное уравнение (12) приводит к двум дифференциальным уравнениям:

$$W'' + \frac{1}{\rho}W' + v^2W = 0, \quad q \frac{\partial^2 H}{\partial s^2} + \frac{\partial H}{\partial s} - \frac{\partial^2 H}{\partial \zeta^2} + v^2H = 0, \quad (13)$$

где v^2 – неопределенная постоянная.

Решение уравнения

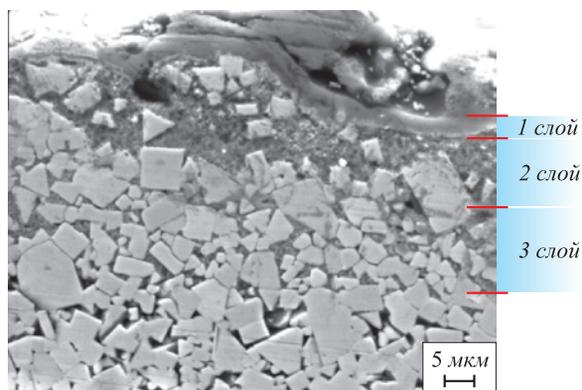


Рис. 3. Микроструктура сплава ВК10(КС) после электровзрывной обработки

Fig. 3. Microstructure of VK10 (KS) alloy after electroexplosive processing

$$W'' + \frac{1}{\rho}W' + v^2W = 0$$

аналогично решению уравнения (6)

$$W(\rho) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i W_i(\rho) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i J_0(v_i \rho).$$

Решение уравнения $q \frac{\partial^2 H}{\partial s^2} + \frac{\partial H}{\partial s} - \frac{\partial^2 H}{\partial \zeta^2} + v^2H = 0$ представим в виде: $H(s, \zeta) = F_1(\xi_1)F_2(\xi_2)$, $\xi_1 = \frac{s}{\sqrt{q}} + \zeta$,

$\xi_2 = \frac{1}{2}(s - \sqrt{q}\zeta)$. Получим обыкновенные дифферен-

циальные уравнения $F_1' - cF_1 = 0$, $F_2' + \frac{2(c + \sqrt{q}v^2)}{\sqrt{q}(1 + 4c\sqrt{q})}F_2 = 0$.

Их решениями являются функции $F_1(\xi_1) = Ae^{c\xi_1}$,

$F_2(\xi_2) = Be^{-\frac{2(c + \sqrt{q}v^2)}{\sqrt{q}(1 + 4c\sqrt{q})}\xi_2}$, где c, A, B – произвольные по-

стоянные. Очевидно, что значения постоянных c_i будут определяться значениями собственных чисел v_i , задающих собственные функции $W_i(\rho) = J_0(v_i \rho)$. Если подчинить коэффициенты A_i начальному условию задачи для (12): $\theta(s, \rho, \zeta)|_{\zeta=0} = \theta_0 = \sum_{i=1}^{\infty} A_i J_0(v_i \rho)$, то произведение постоянных A и B можно подчинить условию $AB = 1$.

Объединяя решения системы (13), получаем решение уравнения теплопроводности:

$$\theta = \sum_{i=1}^{\infty} A_i J_0(v_i \rho) e^{\frac{c_i}{\sqrt{q}}(s + \sqrt{q}\zeta)} e^{-\frac{c_i + \sqrt{q}v_i^2}{\sqrt{q}(1 + 4c_i\sqrt{q})}(s - \sqrt{q}\zeta)} = \sum_{i=1}^{\infty} A_i J_0(v_i \rho) e^{\left(\frac{c_i}{\sqrt{q}} - \frac{c_i + \sqrt{q}v_i^2}{\sqrt{q}(1 + 4c_i\sqrt{q})}\right)s} e^{\left(\frac{c_i + \sqrt{q}v_i^2}{1 + 4c_i\sqrt{q}}\right)\zeta}. \quad (14)$$

Значения c_i найдем из граничного условия на грани $\zeta = \sqrt{\frac{H}{R}}$:

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial \zeta} + \beta \theta \right) \Big|_{\zeta = \sqrt{\frac{H}{R}}} = 0: \left(c_i + \frac{c_i + \sqrt{q} v_i^2}{1 + 4c_i \sqrt{q}} \right) = -\beta. \quad (15)$$

Особенность условия (15) состоит в том, что оно сохраняется для всех сечений $\zeta = \text{const} > 0$. Если считать, что для имитации нагружения температурным импульсом θ_0 в момент $s = 0$ торец $\zeta = 0$ цилиндра должен быть теплоизолирован, то условие $\left(\frac{\partial \theta}{\partial \zeta} - \beta \theta \right) \Big|_{\zeta=0} = 0$ снимается.

Если сохранить размеры и физические свойства образца, принятые ранее, то согласно (15) вектор v собственных значений v_i для функции $W(\rho)$ задает два вектора c собственных значений c_i функции $H(s, \zeta)$: вектор $c^1 = (-0,00730, -0,00731, -0,00734, \dots, -0,01210, \dots)$ и вектор $c^2 = (\text{const}, \dots, \text{const}, \dots)$, $\text{const} = -2,5 \cdot 10^5$.

С учетом граничного условия на выходном торце цилиндра представление (14) упрощается:

$$\theta^1(s, \rho, \zeta) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i J_0(v_i \rho) e^{\frac{2c_i + \beta}{\sqrt{q}} s} e^{-\beta \zeta}. \quad (16)$$

Второй вариант решения задачи для (12) возникает при $c^* = \text{const} = -2,5 \cdot 10^5$:

$$\theta^*(s, \rho, \zeta) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i J_0(v_i \rho) e^{\frac{2c^* + \beta}{\sqrt{q}} s} e^{-\beta \zeta}. \quad (17)$$

Численная оценка результатов анализа существенно зависит от значения параметра τ_r – времени релаксации теплового потока. Известно молекулярно-кинетическое обоснование параметра τ_r [19], мало подходящее для твердых тел. Следуя рекомендации [20], назначим $\tau_r = 10^{-11}$ с. На рис. 4 и 5 представлены распределения температуры $\theta^1(s, \rho, \zeta)$ и $\theta^*(s, \rho, \zeta)$ по телу образца в различные моменты времени. Можно заключить, что, несмотря на малость параметра τ_r , одновременное существование в уравнении теплопроводности слагаемых $\frac{\partial t}{\partial \tau}$ и $\tau_r \frac{\partial^2 t}{\partial \tau^2}$ предполагает существование двух мод экспоненциального перераспределения начальной температуры. По первой из них образец остывает за 5 мин, по второй – за $6 \cdot 10^{-11}$ с. В течение 1 мс от начала теплового нагружения оценка максимального абсолютного значения $\frac{\partial \theta^1}{\partial \zeta}(s, \zeta)$ градиента поля температур постоянна по координате ζ и равна 42°C . Эту же величину принимает оценка максимального абсолютного значения $\frac{\partial \theta^*}{\partial \zeta}(s, \zeta)$ в момент $s = 0$. Скорость изменения температуры $\frac{\partial \theta^*}{\partial s}(s, \zeta)$ изменяется от $-7,2 \cdot 10^{14}^\circ\text{C}$ в момент $s = 0$ до нуля при $s = 10^{-9}$. Заметим, что несмотря на гиперболичность уравнения теплопроводности, полученное ранее решение задачи не является волновым. Сами температурные поля $\theta^1(s, \rho, \zeta)$ и $\theta^*(s, \rho, \zeta)$ реализуют соответственно очень медленный и очень быстрый переносы тепла в глубь образца с малыми значениями их градиентов.

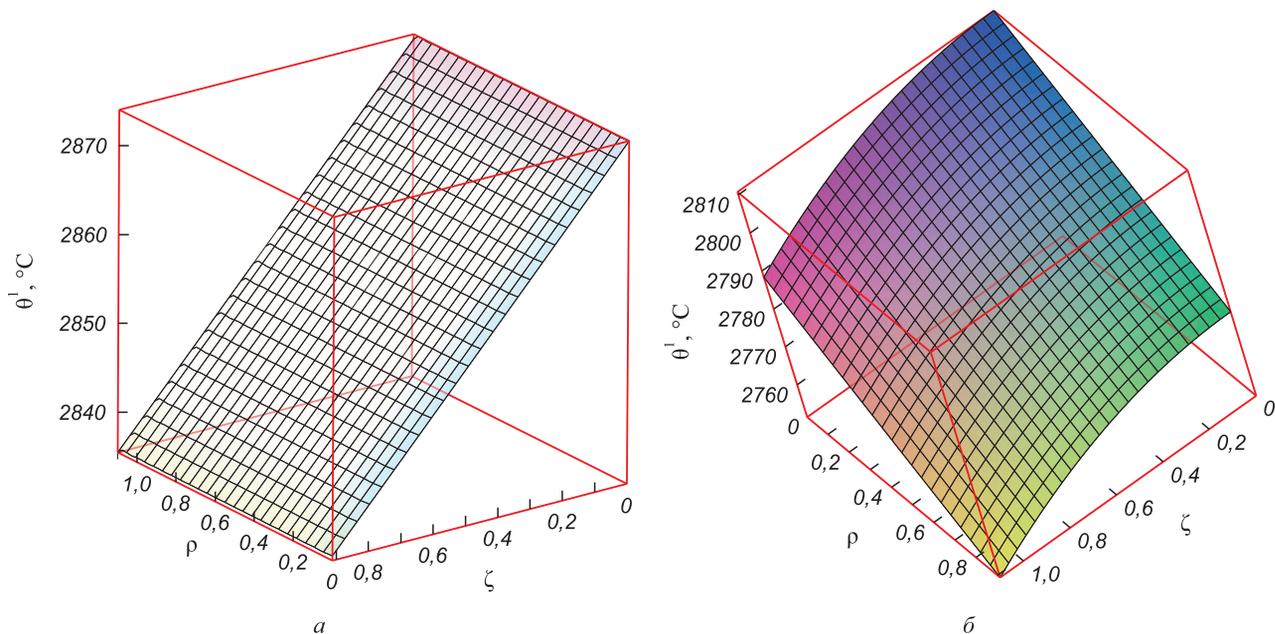


Рис. 4. Температурное поле θ^1 в теле образца в различные моменты времени: $a - \tau = 120$ мкс; $b - \tau = 2,4$ с

Fig. 4. Temperature field θ^1 in a body of the sample at various moments of time: $a - \tau = 120$ mks; $b - \tau = 2.4$ s

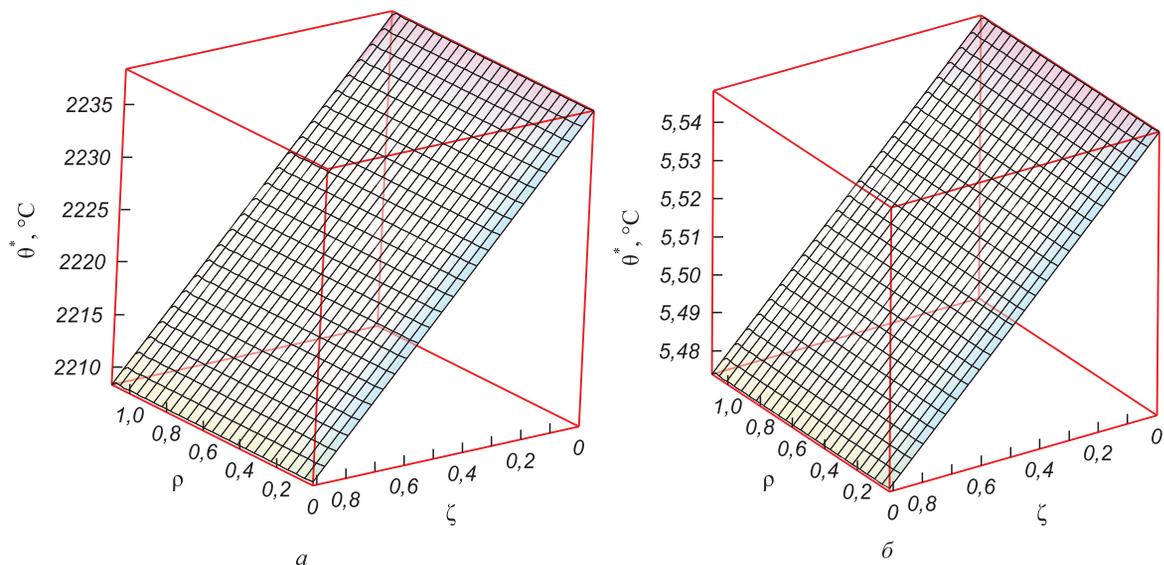


Рис. 5. Температурное поле θ^* в теле образца в различные моменты времени:
 $a - \tau = 2,4 \cdot 10^{-12}$ с; $b - \tau = 6,0 \cdot 10^{-11}$ с

Fig. 5. Temperature field θ^* in a body of the sample at various moments of time:
 $a - \tau = 2.4 \cdot 10^{-12}$ s; $b - \tau = 6.0 \cdot 10^{-11}$ s

Волновая модель

Рассмотрим вариант, когда оба механизма теплопроводности – параболический и гиперболический – функционируют независимо друг от друга, каким-то образом разделяя тепловые потоки. Сформулируем задачу для чисто волнового уравнения с сохранением смысла параметра τ_* , заимствуя начальные и граничные условия задачи для параболического уравнения (и дополняя задачу начальным условием для $\partial\theta/\partial\tau$):

$$q \frac{\partial^2 \theta}{\partial s^2} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \theta}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \zeta^2},$$

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial \rho} + \beta \theta \right) \Big|_{\rho=\sqrt{R/H}} = 0, \quad \left(\frac{\partial \theta}{\partial \zeta} + \beta \theta \right) \Big|_{\zeta=\sqrt{H/R}} = 0, \quad (18)$$

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial \zeta} - \beta \theta \right) \Big|_{\zeta=0} = 0, \quad \theta(s, \rho, \zeta) \Big|_{s=0} = \theta_0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial s}(s, \rho, \zeta) \Big|_{s=0} = b.$$

Для решения задачи применим метод разделения переменных:

$$\theta(s, \rho, \zeta) = F(s)W(\rho)H(\zeta).$$

Подстановка этого разложения в дифференциальное уравнение задачи (18) приводит к обыкновенным дифференциальным уравнениям (c_1, c_2, c_3 – неопределенные постоянные):

$$-F''(s) = c_1 F(s), \quad c_1 = -\chi^2; \quad F(s) = G \cos(\chi s) + G \sin(\chi s);$$

$$-H''(\zeta) = c_3 H(\zeta), \quad c_3 = -p^2; \quad H(\zeta) = D \cos(p\zeta) + E \sin(p\zeta);$$

$$-W'' + \frac{1}{\rho} W' - c_2 W = 0, \quad c_2 = \gamma c_1 - c_3 = -\gamma \chi^2 + p^2,$$

$$W'' + \frac{1}{\rho} W' + (\gamma \chi^2 - p^2) W = 0.$$

Решением уравнения

$$W'' + \frac{1}{\rho} W' + v^2 W = 0, \quad v^2 = \gamma \chi^2 - p^2, \quad (19)$$

не имеющим особенностей в точке $\rho = 0$, по-прежнему является функция Бесселя 1-го рода нулевого порядка:

$$W(\rho) = A J_0(v\rho), \quad A = \text{const.}$$

Из граничного условия для функции θ при $\rho = \sqrt{R/H}$ находятся собственные числа v_i и собственные функции $J_0(v_i \rho)$, откуда получаем:

$$W(\rho) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i W_i(\rho) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i J_0(v_i \rho). \quad (20)$$

Решением уравнения $H'' + p^2 H = 0$ является функция $H(\zeta) = D \cos(p\zeta) + E \sin(p\zeta)$ с неопределенными коэффициентами D и E . Выполнение граничных условий

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial \zeta} + \beta \theta \right) \Big|_{\zeta=\sqrt{H/R}} = 0, \quad \left(\frac{\partial \theta}{\partial \zeta} - \beta \theta \right) \Big|_{\zeta=0} = 0$$

возможно, если постоянная $\sqrt{H/R} p = \omega$ принимает зна-

чения корней ω_j уравнения $\operatorname{ctg}(\omega) = \frac{1}{2} \left(\frac{\omega}{\sqrt{\frac{H}{R}\beta}} - \frac{\sqrt{\frac{H}{R}\beta}}{\omega} \right)$.

Бесконечное семейство положительных корней $p_j = \sqrt{\frac{R}{H}} \omega_j$ позволяет получить семейство линейно независимых частных решений уравнения $H'' + p^2 H = 0$:

$$H_j(\zeta) = \cos(p_j \zeta) + \frac{\beta}{\chi_j} \sin(p_j \zeta)$$

и общее решение уравнения имеет вид:

$$H(\zeta) = \sum_{i=1}^{\infty} D_j \left[\cos(p_j \zeta) + \frac{\beta}{p_j} \sin(p_j \zeta) \right], \quad D_j = \left(\frac{1}{2} \right)^j.$$

Зная собственные числа p_j и v_i , найдем матрицу собственных чисел χ_{ij} – параметров решения задачи для уравнения $F''(s) + \chi^2 F(s) = 0$:

$$\chi_{ij} = \sqrt{\frac{v_i^2 + p_j^2}{\gamma}}.$$

Общее решение дифференциального уравнения из задачи (18), удовлетворяющее граничным условиям, имеет вид:

$$\theta(s, \zeta, \rho) = \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \left[\left(G_{ij} \cos(\chi_{ij} s) + B_{ij} \sin(\chi_{ij} s) \right) \times \left(\cos(p_j \zeta) + \frac{\beta}{p_j} \sin(p_j \zeta) \right) \right] \right\} J_0(v_i \rho). \quad (21)$$

Неопределенные коэффициенты общего решения найдем из начальных условий для волнового уравнения. Начальное условие $\theta(s, \zeta, \rho)|_{s=0} = \theta_0$ приводит к равенству

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} G_{ij} \right) J_0(v_i \rho) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i J_0(v_i \rho) = \theta_0,$$

являющемуся разложением постоянной θ_0 в ряд по функциям Бесселя. Процедура вычисления коэффициентов $A_i = \sum_{j=1}^{\infty} G_{ij}$ была показана выше.

Согласно второму начальному условию

$$\frac{\partial \theta}{\partial s}(s, \zeta, \rho) \Big|_{s=0} = b$$

имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial s}(0, 0, \rho) &= \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} B_{ij} \chi_{ij} \right) J_0(v_i \rho) = \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} Q_i J_0(v_i \rho) = b, \quad Q_i = \sum_{j=1}^{\infty} B_{ij} \chi_{ij}. \end{aligned}$$

Коэффициенты Q_i уравнения $\sum_{i=1}^{\infty} Q_i J_0(v_i \rho) = b$ находятся по схеме вычисления коэффициентов A_i .

В задаче для волнового уравнения теплопроводности требуется выполнение двух начальных условий для всего тела цилиндра, а не только для одного его торца. Поэтому сохраняется неопределенность коэффициентов G_{ij} и B_{ij} , связанных двумя уравнениями:

$$A_i = \sum_{j=1}^{\infty} G_{ij}, \quad Q_i = \sum_{j=1}^{\infty} B_{ij} \chi_{ij}. \quad (22)$$

Поскольку требования для условий распространения теплового потока исчерпаны, то применим уже использованный способ формирования коэффициентов G_{ij} и B_{ij} :

$$G_{ij} = \left(\frac{1}{2} \right)^j A_i, \quad B_{ij} = \frac{\left(\frac{1}{2} \right)^j Q_i}{\chi_{ij}}.$$

Получаем решение поставленной задачи:

$$\begin{aligned} \theta(s, \zeta, \rho) &= \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \left[\left(\left(\frac{1}{2} \right)^j A_i \cos(\chi_{ij} s) + \right. \right. \right. \\ &+ \left. \left. \left. \frac{\left(\frac{1}{2} \right)^j Q_i}{\chi_{ij}} \sin(\chi_{ij} s) \right) \left(\cos(p_j \zeta) + \frac{\beta}{p_j} \sin(p_j \zeta) \right) \right] \right\} J_0(v_i \rho). \quad (23) \end{aligned}$$

Для построения графиков использованы те же размеры и свойства образца. Добавлено значение постоянной b , задающей второе начальное условие задачи; исходя из анализа результатов принято $b = -5000$ К. На рис. 6 показаны графики решения в различные моменты времени. Решение является бегущей волной, скорость перемещения фазы в волне температуры равна 2 235 м/с. Многократные отражения волны от плоских торцов цилиндра происходят при выполнении граничных условий, отводящих тепло от образца. Физический смысл картины сохраняется до тех пор, пока $\theta > 0$ (первые 28 мкс). Однако однородное волновое уравнение стремится к равновесному колебательному процессу относительно значения $\theta = 0$. При $\theta < 0$ теряется физический смысл тепловой релаксации и собственно температуры, и граничные условия могут перемещать отрицательное тепло в образец. Отсюда двойная периодичность временной развертки температурного поля (рис. 7). Как следует из рис. 7, а, пики 3 и 4 распределения температуры θ попадают в интервал температур, в

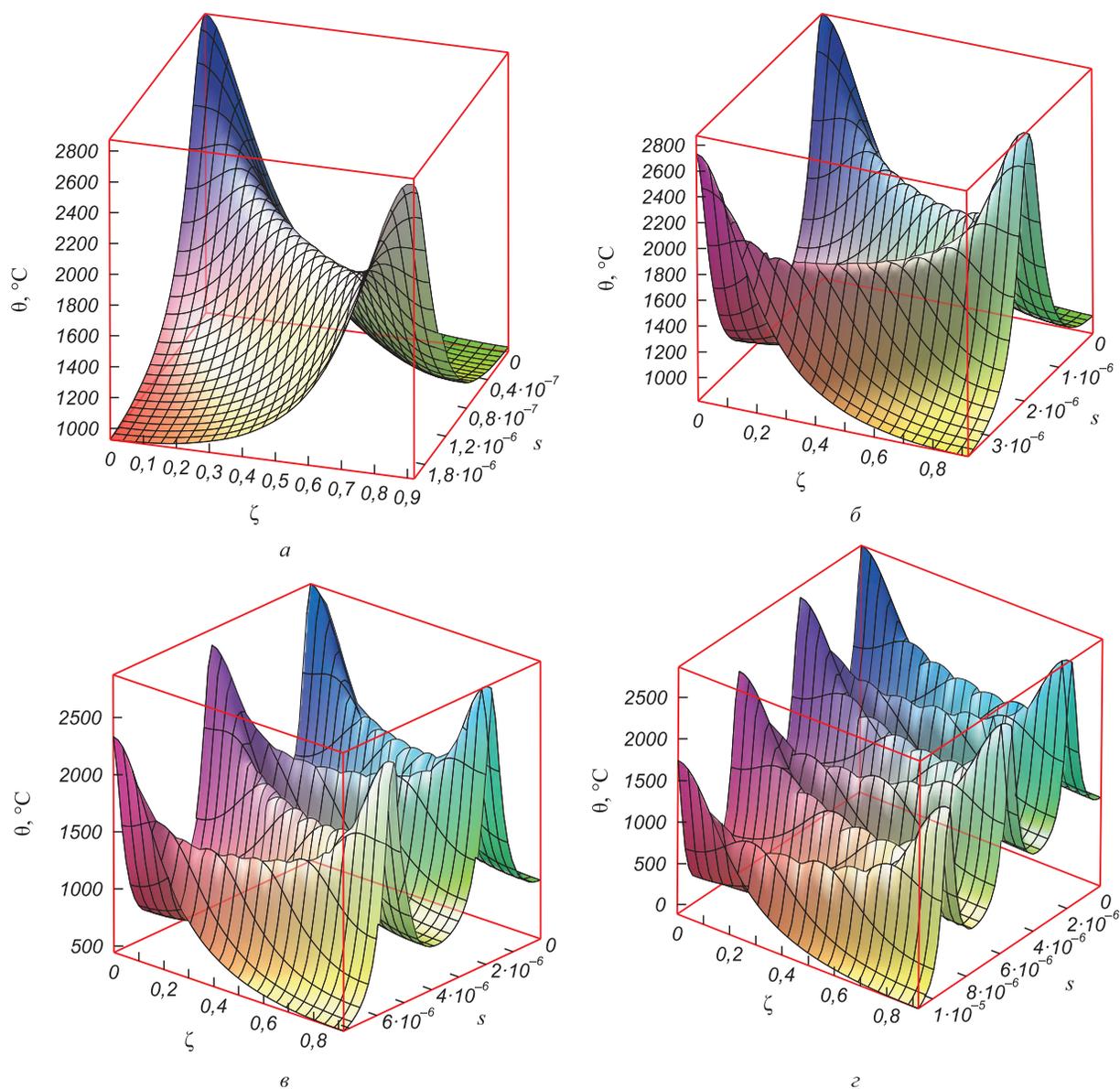


Рис. 6. Динамика температурного поля в тепловой волне от начала нагружения до момента времени:
 а – $\tau = 4,3$ мкс; б – $\tau = 8,7$ мкс; в – $\tau = 17,3$ мкс; г – $\tau = 26,0$ мкс

Fig. 6. Dynamics of a temperature field in a heat wave from the beginning of loading till the time moment:
 а – $\tau = 4.3$ mks; б – $\tau = 8.7$ mks; в – $\tau = 17.3$ mks; г – $\tau = 26.0$ mks

котором вследствие высокой скорости охлаждения наблюдаются недиффузионные механизмы изменения фазовых структур материала (эти пики располагаются на расстоянии 30 – 50 мкм от поверхности образца). Наибольшее по абсолютной величине значение градиента температурного поля достигается в начальный момент ($s = 0$) на глубине около 1 мм (рис. 8).

Выводы. Как правило, упрочнение поверхности металлического изделия электронным пучком или лазерным излучением предполагает возможность расплавления тонкого поверхностного слоя и фазовых превращений в нем при охлаждении [21]. Следствием больших значений градиента температурного поля и скорости его изменения во времени в твердом состоянии поверхностного слоя является возникновение в

нем термических напряжений высокой интенсивности. Для анализа вышеуказанных процессов необходимо адекватное описание динамики температурного поля как следствия действия потока энергии. Привлечение в анализ задачи Стефана при коротком времени существования движущейся с затуханием границы фаз нецелесообразно. Результаты работы позволяют сделать вывод, что оба решения задачи для уравнения гиперболической теплопроводности далеки от реальной картины распространения тепла. Градиенты температурного поля в решениях задач для уравнения параболической теплопроводности и волнового уравнения находятся в одном порядке значений. Температурное поле бегущей тепловой волны с суммированием первых ее отражений в изделии следует принимать

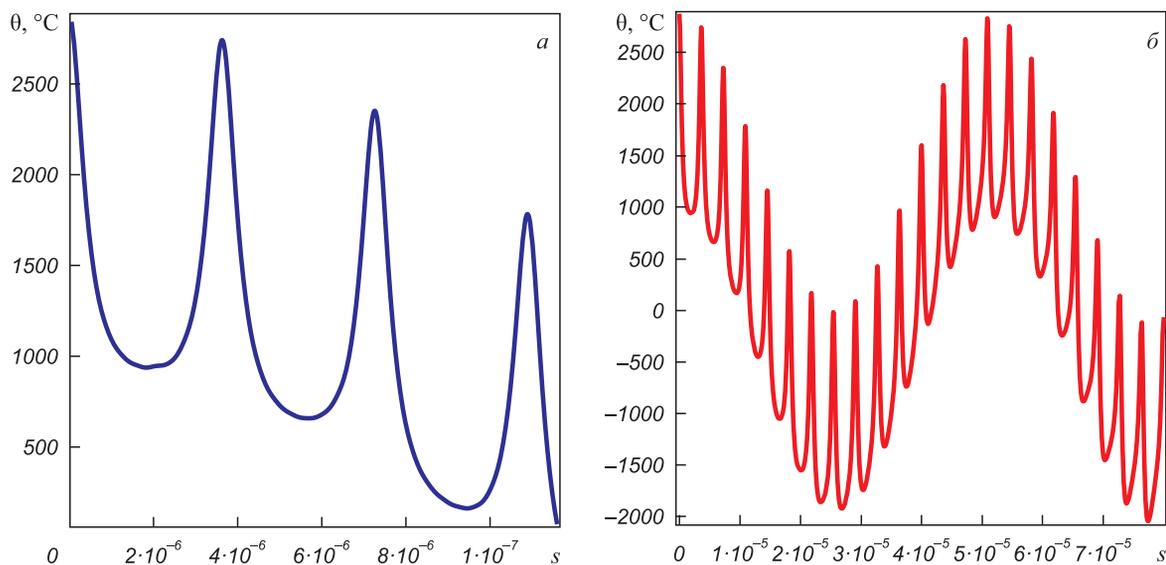


Рис. 7. Периодичность колебаний температуры в тепловой волне от начала нагружения до момента времени:
 $a - \tau = 28$ мкс; $b - \tau = 193$ мкс

Fig. 7. Periodicity of fluctuations of temperature in a heat wave from the beginning of loading till the time moment:
 $a - \tau = 28$ mks; $b - \tau = 193$ mks

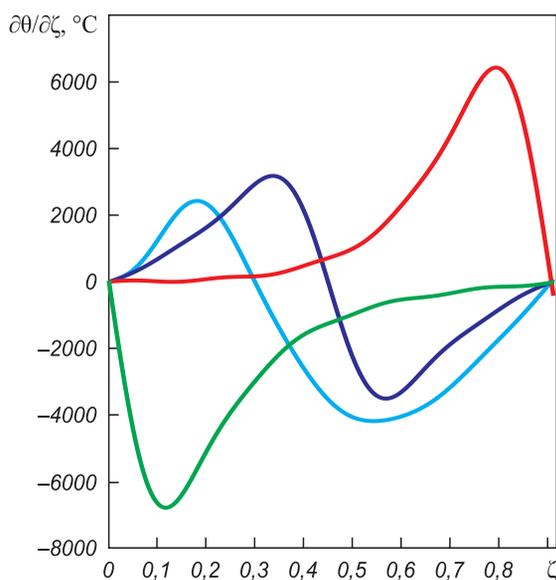


Рис. 8. Распределения основной составляющей градиента температурного поля тепловой волны вдоль оси образца в различные моменты времени:
 $1 - \tau = 0$; $2 - \tau = 24$ мкс; $3 - \tau = 240$ мкс; $4 - \tau = 2,4$ мс

Fig. 8. Distributions of the basic component of the temperature fields gradient of a heat wave along an axis of the sample at various moments of time:
 $1 - \tau = 0$; $2 - \tau = 24$ mks; $3 - \tau = 240$ mks; $4 - \tau = 2.4$ ms

в расчет при оценке фазовых превращений под влиянием температурных напряжений. Пики суммарного температурного поля в бегущей волне расположены в цилиндре периодически (с затуханием) и могут инициировать в нагружаемом импульсом материале фазовые превращения по недиффузионному механизму (например, двойникования).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Якушин В.Л. Поверхностное упрочнение углеродистых и низколегированных сталей потоками высокотемпературной импульсной плазмы // Технология машиностроения. 2004. № 5. С. 38 – 43.
2. Якушин В.Л., Аун Тхурейн Хейн, Джумаев П.С. и др. Модифицирование структурно-фазового состояния феррито-мартенситных сталей воздействием потоками импульсной газовой плазмы // Перспективные материалы. 2013. № 5. С. 5 – 14.
3. Князева А.Г., Поболь И.Л., Гордиенко А.И. и др. Моделирование теплофизических и физико-химических процессов, сопровождающих формирование покрытий в электронно-лучевых технологиях модификации поверхностей металлических материалов // Физическая мезомеханика. 2007. Т. 10. С. 105 – 109.
4. Молотков С.Г., Башенко Л.П., Будовских Е.А. и др. Моделирование нагрева поверхности металла при электровзрывном легировании с учетом формы теплового импульса // Изв. вуз. Черная металлургия. 2013. № 6. С. 44 – 46.
5. Лыков А.В. Теория теплопроводности: Учебное пособие. – М.: Высшая школа, 1967. – 993 с.
6. Cattaneo C. Sur une forme de l'equation de la chaleur eliminant le paradoxe d'une propagation instantee // C. r. Acad. sci. 1958. Vol. 247. No. 4. P. 431 – 433.
7. Lord H., Shulman Y. A generalized dynamical theory of thermoelasticity // J. Mech.Phys. Solids. 1967. Vol. 15. P. 299 – 309.
8. Chen P.J., Gurtin M.E., Willams W.O. & next. A note on non simple heat conduction // Z. Angew. Math. Phys. 1968. Bd. 19. S. 969 – 970.
9. Chen P.J., Gurtin M.E., Willams W.O. & next. On the thermodynamics of non-simple elastic materials with two temperatures // Z. Angew. Math. Phys. 1969. Bd. 20. S. 107 – 112.
10. Warren W.E., Chen P.J. Wave propagation in two temperatures theory of thermoelasticity // Acta Mech. 1973. Vol. 16. P. 83 – 117.
11. Tzou D.Y. A unified approach for heat conduction from macro to micro-scales // Trans. ASME. J. Heat Transfer. 1995. Vol. 117. P. 8 – 16.
12. Quintanilla R., Horgan C.O. Spatial behaviour of solutions of the dual-phase-lag heat equation // Math. Methods Appl. Sci. 2005. Vol. 25. P. 43 – 57.

13. Quintanilla R. A well-posed problem for the three-dual-phase lag heat conduction theory // *J. Thermal Stresses*. 2009. Vol. 32. P. 1270–1278.
14. Kaminski W. Hyperbolic heat conduction equation for materials with a non-homogeneous inner structure // *Trans ASME Journal of Heat Transfer*. 1990. Vol. 112. P. 555.
15. Tien C.L., Qiu T.Q. Heat transfer mechanism during short pulse laser heating of metals // *Trans ASME Journal of Heat Transfer*. 1993. Vol. 115. P. 835–841.
16. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики: Учебное пособие. – М.: Высшая школа, 1970. – 707 с.
17. Дьяконов В.П. Maple 10/11/12/13/14 в математических расчетах. – М.: ДМК, 2011. – 799 с.
18. Осколкова Т.Н., Будовских Е.А., Горюшкин В.Ф. Особенности структурообразования поверхностного слоя при электровзрывном легировании карбидовольфрамового твердого сплава // *Изв. вуз. Порошковая металлургия и функциональные покрытия*. 2012. № 3. С. 46–50.
19. Moses G.A., Duderstadt J.J. Improved treatment of electron thermal conduction in plasma hydrodynamics calculations // *Phys. Fluids*. 1977. Vol. 20. No. 5. P.762–770.
20. Кудинов В.А., Карташов Э.М., Калашников В.В. Аналитические решения задач тепломассопереноса и термоупругости для многослойных конструкций: Учебное пособие. – М.: Высшая школа, 2005. – 429 с.
21. Асташинский В.В. Численный расчет динамики температурных полей, определяющих фазовый состав поликристаллического железа в процессе воздействия на него компрессионного плазменного потока // *Инженерно-физический журнал*. 2014. Т. 87. № 4. С. 791–795.

Поступила 27 сентября 2016 г.

IZVESTIYA VUZOV. CHERNAYA METALLURGIYA = IZVESTIYA. FERROUS METALLURGY. 2017. VOL. 60. No. 5, pp. 398–409.

MATHEMATICAL MODELING OF THERMAL PROCESSES AT SURFACE TREATMENT OF METAL PRODUCTS WITH HIGHLY CONCENTRATED ENERGY FLOWS

V.I. Bazaikin, O.L. Bazaikina, T.N. Oskolkova, M.V. Temlyantsev

Siberian State Industrial University, Novokuznetsk, Russia

Abstract. The modeling tasks of thermal effect of power impulse action on a surface of the plate of VK10 (KS) alloy were considered and solved. As modeling tasks for homogeneous equations of parabolic and hyperbolic heat conductions, a wave equation in a cylindrical solid of final sizes with boundary conditions of III kind were chosen. The action of power impulse from an exterior radiant was modeled by sudden appearance of initial high temperature, which spreads on a plate body under the laws expressed by various heat conduction equations, on one of the surface ends of a cylinder. Approaches of temperature fields were received in the form of a series segment of functions from eigenvalues of tasks, gradients of fields were defined. Simultaneous presence in the equation of heat conductivity of private derivatives on time of the first and second usages (the hyperbolic equation), statement of the task for it with boundary conditions of III kind and the entry condition at a cylinder end surface provides two ways (modes) of the problem's decision, both of diffusion type. For the value of the relaxation time of the heat flux of 10^{-11} s, the complete cooling of the cylindrical sample (tungsten carbide) in the first mode is minutes, in the second – 10^{-10} s. It can be concluded that the modes for solving the problem for the hyperbolic heat equation do not correspond to the actual pattern of heat propagation. However, the linear combination of these modes as a solution of the problem preserves the possibility of obtaining a diffusion dynamics adequate to the actual process. Gradients of the temperature field in the solutions of the problems for the parabolic heat conduction equation and the wave equation are in the same order of values. The temperature field of the moving thermal wave for several of its first reflections in experimental samples should be taken into account when evaluating phase transformations and temperature stresses. The results of the theoretical analysis are compared with changes in the microstructure of the near-surface layer of a plate of alloy VK10 (KS), subjected to electric explosive loading by plasma of a titanium foil.

Keywords: power impulse, electroexplosive load, round plate, heat conduction equation, thermal relaxation, eigenvalues of task, boundary conditions of III kind, dynamics of a temperature field, subsurface layer, thermal stresses, tungsten carbide, microstructure.

REFERENCES

1. Yakushin V.L. Surface hardening of carbon and low alloyed steels by high-temperature pulsed plasma flows. *Tekhnologiya mashinostroyeniya*. 2004, no. 5, pp. 38–43. (In Russ.).
2. Yakushin V.L., Aun Tkhurein Khein, Dzhumayev P.S. etc. Modification of structural and phase state of ferrite-martensitic steels by the influence of a pulsed flow of the gas plasma. *Perspektivnye materialy*. 2013, no. 5, pp. 5–14. (In Russ.).
3. Knyazeva A.G., Pobol I.L., Gordienko A.I., Demidov V.N., Kryukova O.N., Oleschuk I.G. Simulation of thermophysical and physico-chemical processes occurring at coating formation in electron-beam technologies of surface modification of metallic materials. *Physical Mesomechanics*. 2007, vol. 10, no. 3-4, pp. 207–220.
4. Molotov S.G., Bashchenko L.P., Budovskikh E.A. etc. Modeling of heating the metal surface during electroexplosive alloying with different shape of the heat pulse. *Izvestiya VUZov. Chernaya metallurgiya = Izvestiya. Ferrous Metallurgy*. 2013, no. 6, pp. 44–46. (In Russ.).
5. Lykov A.V. *Teoriya teploprovodnosti: uchebnoe posobie* [Heat conduction theory: tutorial]. Moscow: Vysshaya shkola, 1967, 993 p. (In Russ.).
6. Cattaneo C. Sur une forme de l'équation de la chaleur éliminant le paradoxe d'une propagation instantanée. *C. r. Acad. sci.* 1958, vol. 247, no. 4, pp. 431–433. (In Fr.)
7. Lord H., Shulman Y. A generalized dynamical theory of thermoplasticity. *J. Mech. Phys. Solids*. 1967, vol. 15, pp. 299–309.
8. Chen P.J., Gurtin M.E., Willams W.O. A note on non-simple heat conduction. *Z. Angew. Math. Phys.* 1968, Bd. 19, S. 969–970.
9. Chen P.J., Gurtin M.E., Willams W.O. On the thermodynamics of non-simple elastic materials with two temperatures. *Z. Angew. Math. Phys.* 1969, Bd. 20, S. 107–112.
10. Warren W.E., Chen P.J. Wave propagation in two temperatures theory of thermoelasticity. *Acta Mech.* 1973, vol. 16, pp. 83–117.
11. Tzou D.Y. A unified approach for heat conduction from macro to micro-scales. *Trans. ASME. J. Heat Transfer*. 1995, vol. 117, pp. 8–16.
12. Quintanilla R., Horgan C.O. Spatial behavior of solutions of the dual-phase-lag heat equation. *Math. Methods Appl. Sci.* 2005, vol. 25, pp. 43–57.
13. Quintanilla R. A well-posed problem for the three-dual-phase lag heat conduction theory. *J. Thermal Stresses*. 2009, vol. 32, pp. 1270–1278.

DOI: 10.17073/0368-0797-2017-5-398-409

14. Kaminski W. Hyperbolic heat conduction equation for materials with a non-homogeneous inner structure. *Trans ASME Journal of Heat Transfer*. 1990, vol. 112, p. 555.
15. Tien C.L., Qiu T.Q. Heat transfer mechanism during short pulse laser heating of metals. *Trans ASME Journal of Heat Transfer*. 1993, vol. 115, pp. 835–841.
16. Koshlyakov N.S., Gliner E.B., Smirnov M.M. *Uravneniya v chastnykh proizvodnykh matematicheskoi fiziki: uchebnoe posobie* [Partial differential equations of mathematical physics: Tutorial]. Moscow: Vysshaya shkola, 1970, 707 p. (In Russ.).
17. D'yakonov V.P. *Maple 10/11/12/13/14 v matematicheskikh raschetakh* [Maple 10/11/12/13/14 in mathematical calculations]. Moscow: DMK, 2011, 799 p. (In Russ.).
18. Oskolkova T.N., Budovskikh E.A., Goryushkin V.F. Features of structure formation of the surface layer at electroexplosive alloying of a tungsten carbide hard alloy. *Izvestiya VUZov. Poroshkovaya metallurgiya i funktsional'nye pokrytiya*. 2012, no. 3, pp. 46–50. (In Russ.).
19. Moses G.A., Duderstadt J.J. Improved treatment of electron thermal conduction in plasma hydrodynamics calculations. *Phys. Fluids*. 1977, vol. 20, no. 5, pp.762–770.
20. Kudinov V.A., Kartashov E.M., Kalashnikov V.V. *Analiticheskie resheniya zadach teplomassoperenosa i termouprugosti dlya mnogo-*
sloinykh konstruksii: uchebnoe posobie [Analytical solution of heat and mass transfer tasks and thermal elasticity for multilayer structures: Tutorial]. Moscow: Vysshaya shkola, 2005, 429 p. (In Russ.).
21. Astashinskii V.V. Numerical calculation of the dynamics of temperature fields that determine the phase composition of polycrystalline iron during its exposure to a compression plasma flow. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 2014, vol. 87, no. 4, pp. 815–819.

Information about the authors:

V.I. Bazaikin, Dr. Sci. (Eng.), Professor of the Chair of Applied Mathematics and Informatics (bazaykin.vi@yandex.ru)

O.L. Bazaikina, Cand. Sci. (Eng.), Assist. Professor of the Chair of Applied Mathematics and Informatics (bazayolga@yandex.ru)

T.N. Oskolkova, Cand. Sci. (Eng.), Assist. Professor of the Chair “Metal Forming and Metal Science”. OJSC “EVRAZ ZSMK” (oskolkova@kuz.ru)

M.V. Temlyantsev, Dr. Sci. (Eng.), Professor of the Chair “Thermal Power and Ecology”, Vice-Rector for Research and Innovations (Ucheb.otdel@sibsiu.ru)

Received September 27, 2016